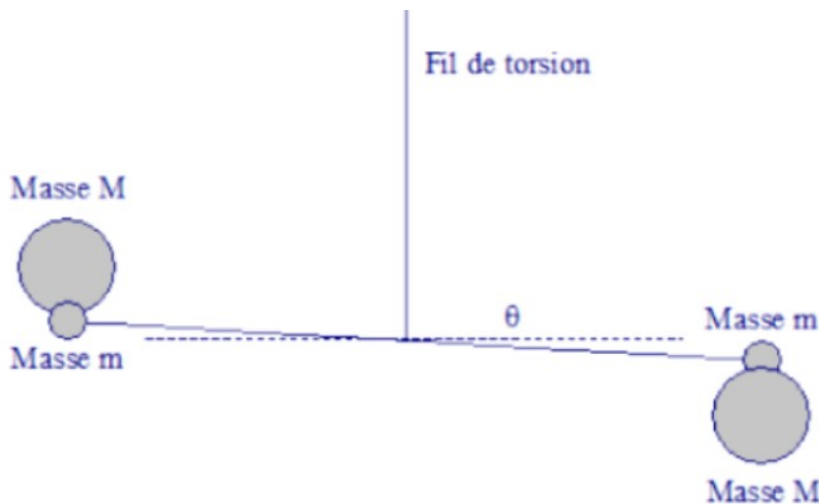


par Gilbert Gastebois

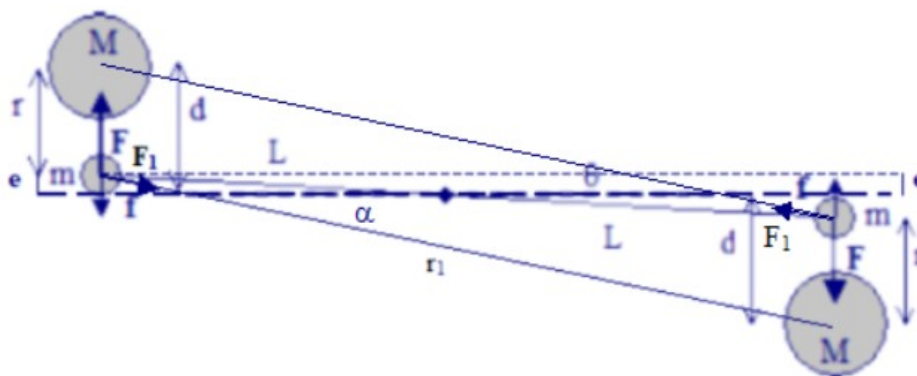
En 1798, H. Cavendish fit une expérience visant à "peser" la Terre. En pratique il détermina la constante de gravitation G .

1. Schéma

Vue de côté



Vue de dessus



θ Angle de torsion du pendule (très faible) donc $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1$

R Rayon des masses m

L Distance entre l'axe et le centre de gravité des masses m.

d Distance initiale entre les centres de gravité de m et M

r Distance entre les centres de gravité de m et M.

$e = d - r = L\theta$

r_1 Distance entre les centres de gravité de m et de l'autre masse M. $r_1^2 = 4L^2 + (d + e)^2$

J Moment d'inertie du pendule par rapport à son axe. $J = 2mL^2$

F Force de gravitation entre m et M. $F = G \frac{mM}{r^2}$

F_1 Force de gravitation entre m et l'autre masse M. $F_1 = G \frac{mM}{r_1^2}$

f Force de frottement fluide de l'air sur la masse m. $f = 6\pi\eta RL \frac{d\theta}{dt}$

M_c Couple de torsion du fil. $M_c = -C\theta$ (C constante de torsion du fil)

2. Étude du mouvement du pendule de torsion

2.1 Équation différentielle du mouvement.

θ est très faible donc $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1$

Équation de Newton : $\mathbf{J} \theta'' = \sum \mathbf{M}_F$

$$\mathbf{J} \theta'' = \mathbf{M}_C + 2\mathbf{M}_r + 2\mathbf{M}_F + 2\mathbf{M}_{F1}$$

$\mathbf{M}_C = -C\theta$ Moment de rappel du fil de torsion de constante de torsion C

$\mathbf{M}_r = -fL = -6\pi\eta R v L = -6\pi\eta RL^2 \theta'$ η est le coefficient de viscosité de l'air

(θ' est très faible donc le frottement de l'air est laminaire : Loi de Stokes)

$$\mathbf{M}_F = GMm/r^2 L = GMmL/(d - e)^2 = GMmL/(d - L\theta)^2$$

$$\mathbf{M}_{F1} = -GMm/r_1^2 L \sin\alpha$$

r_1^2 est très supérieur à r_1^2 (~ 50 fois plus) et $\sin\alpha$ est petit $\sim 1/7$ donc $\mathbf{M}_{F1} \ll \mathbf{M}_F$

\mathbf{M}_{F1} est une contribution marginale, on n'a donc pas besoin de le calculer avec une grande précision. On peut le calculer pour $\theta = 0$:

$$r_1^2 = 4L^2 + d^2 \quad \text{et} \quad \sin\alpha = d/r_1$$

$$\mathbf{M}_{F1} = -GMmLd/(4L^2 + d^2)^{3/2}$$

$$\mathbf{M}_F = GMmL/(d - L\theta)^2 = GMmL/(d^2(1 - L\theta/d)^2)$$

$$\mathbf{J} \theta'' = -C\theta - 12\pi\eta RL^2 \theta' + 2GMmL/(d^2(1 - L\theta/d)^2) - 2GMmLd/(4L^2 + d^2)^{3/2}$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. On peut cependant la résoudre en remplaçant $1/(1 - L\theta/d)^2$ par son développement de Taylor. Comme $L\theta/d$ n'est pas très petit, on développe jusqu'au second degré où $(L\theta/d)^2 < 0,01$

$$(1 + \varepsilon)^{-2} = 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots \quad \text{donc} \quad 1/(1 - L\theta/d)^2 = 1 + 2L\theta/d + 3L^2\theta^2/d^2$$

$$\mathbf{J} \theta'' = -C\theta - 12\pi\eta RL^2 \theta' + 2GMmL/d^2 + 4GMmL^2/d^3 \theta + 6GMmL^3/d^4 \theta^2 - 2GMmLd/(4L^2 + d^2)^{3/2}$$

$$\theta'' + 12\pi\eta RL^2/J \theta' + (C/J - 4GMmL^2/(Jd^3)) \theta = 2GMmL(1/(Jd^2) - d/(J(4L^2 + d^2)^{3/2})) +$$

$$6GMmL^3/(Jd^4) \theta^2 = 0$$

$$\text{On pose : } \omega_0^2 = C/J - 4GMmL^2/(Jd^3) \quad \gamma = 12\pi\eta RL^2/J$$

$$\mathbf{A} = 2GMmL(1/(Jd^2) - d/(J(4L^2 + d^2)^{3/2})) \quad \mathbf{B} = 6GMmL^3/(Jd^4)$$

$$\theta'' + \gamma \theta' + \omega_0^2 \theta = \mathbf{A} + \mathbf{B} \theta^2$$

Cette équation n'a toujours pas de solution! Cependant on peut la résoudre par la méthode des perturbations car θ est petit. On pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$

θ_e est l'angle de rotation à l'équilibre ou $\theta'' = 0$ et $\theta' = 0$ donc

$$\omega_0^2 \theta_e = \mathbf{A} + \mathbf{B} \theta_e^2$$

On reporte $\theta = \theta_e + \varepsilon$ dans l'équation différentielle :

$$\varepsilon'' + \gamma \varepsilon' + \omega_0^2 \theta_e + \omega_0^2 \varepsilon = \mathbf{A} + \mathbf{B} \theta_e^2 + 2\mathbf{B} \theta_e \varepsilon + \mathbf{B} \varepsilon^2 \quad (\theta_e^2 \varepsilon^2 \text{ négligeable devant } \theta_e \varepsilon)$$

$$\varepsilon'' + \gamma \varepsilon' + \omega^2 \varepsilon = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - 2\mathbf{B} \theta_e$$

$$\text{Comme on a } \omega_0^2 \theta_e = \mathbf{A} + \mathbf{B} \theta_e^2 \quad \text{Équation de solution : } \theta_e = \frac{\omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 - 4\mathbf{A}\mathbf{B}}}{2\mathbf{B}}$$

$$\text{On obtient : } \omega^2 = \sqrt{\omega_0^4 - 4\mathbf{A}\mathbf{B}}$$

2.2 Solution de l'équation différentielle.

On cherche une solution du type : $\varepsilon = k e^{\alpha t}$

$$(\alpha^2 + \gamma \alpha + \omega^2) k e^{-\alpha t} = 0 \text{ donc}$$

$$\alpha^2 + \gamma \alpha + \omega^2 = 0 \text{ ce qui donne :}$$

$$\alpha = -\gamma/2 \pm j(\omega^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = \gamma/2 \pm j \omega \text{ car } \gamma^2 \ll \omega^2 \text{ (}\omega^2 > 10^5 \gamma^2\text{)}$$

La solution est donc

$$\varepsilon = k \exp(-\gamma/2 t \pm j \omega t) \quad \text{On prend la partie réelle}$$

$$\varepsilon = e^{-\gamma/2 t} (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$$

$$\text{Conditions initiales : A } t = 0, \theta = 0 \text{ et } d\theta/dt = 0 \rightarrow \varepsilon = -\theta_e \text{ et } d\varepsilon/dt = 0$$

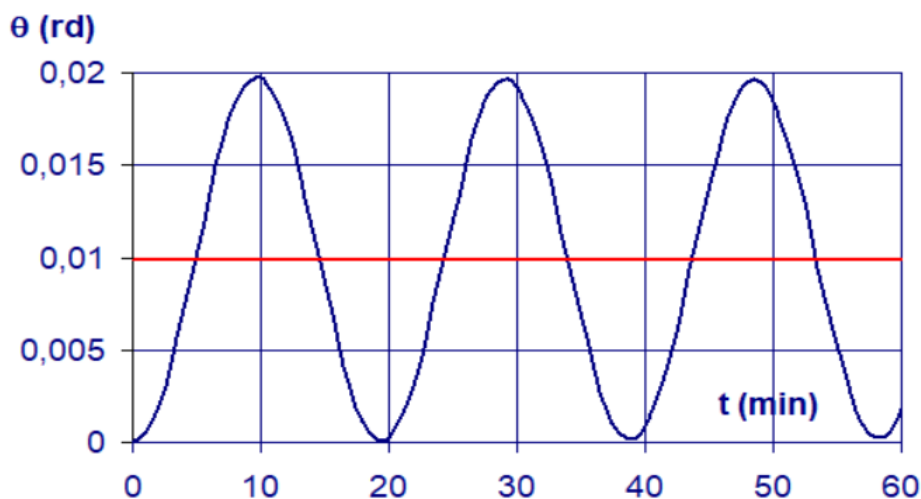
$$\text{A } t = 0, \varepsilon = a \text{ donc } a = -\theta_e$$

$$\text{A } t = 0, d\varepsilon/dt = 0 = -a \gamma/2 + b \omega \text{ donc } b = a \gamma/(2\omega) = -\theta_e \gamma/(2\omega)$$

$$\varepsilon = -\theta_e e^{-\gamma/2 t} (\cos(\omega t) + \gamma/(2\omega) \sin(\omega t)) \text{ donc}$$

$$\theta = \theta_e - \theta_e e^{-\gamma/2 t} (\cos(\omega t) + \gamma/(2\omega) \sin(\omega t))$$

On a donc une oscillation très faiblement amortie de pulsation ω autour de $\theta = \theta_e$



$$\begin{aligned} \eta &= 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s} \\ C &= 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ Nm} \\ M &= 160 \text{ kg} \\ m &= 725 \text{ g} \\ d &= 0,2 \text{ m} \\ R &= 0,025 \text{ m} \\ L &= 0,9 \text{ m} \\ J &= 1,2 \text{ kg m}^2 \\ \gamma &= 1,145 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\ T &= 1164,3 \text{ s} \\ \theta_e &= 9,90 \cdot 10^{-3} \text{ rd} \end{aligned}$$

3. Détermination de la constante de gravitation G

3.1 Mesure de la période T

$$\omega_0^2 = C/J - 4GMmL^2/(Jd^3) \quad A = 2GMmL(1/(Jd^2) - d/(J(4L^2 + d^2)^{3/2})) \quad B = 6GMmL^3/(Jd^4)$$

$$\omega^4 = \omega_0^4 - 4AB = (C/J - 4GMmL^2/(Jd^3))^2 - 48G^2M^2m^2L^4(1/(J^2d^6) - 1/(J^2d^3(4L^2+d^2)^{3/2}))$$

$$\omega^4 = C^2/J^2 - 8CGMmL^2/(J^2d^3) + 16G^2M^2m^2L^4/(J^2d^6) - 48G^2M^2m^2L^4/(J^2d^6) + 48G^2M^2m^2L^4/(J^2d^3(4L^2+d^2)^{3/2})$$

$$(32L^4/J^2 - 48L^4d^3/(J^2(4L^2+d^2)^{3/2}))(GMm/d^3)^2 + 8CL^2/J^2 GMm/d^3 - C^2/J^2 + \omega^4 = 0 \quad \text{ou}$$

$$(32L^4 - 48L^4d^3/(4L^2+d^2)^{3/2})(GMm/d^3)^2 + 8CL^2 GMm/d^3 - (C^2 - J^2 \omega^4) = 0$$

Équation du second degré dont la solution est :

$$\frac{GMm}{d^3} = \frac{-4CL^2 + \sqrt{16C^2L^4 + (32L^4 - 48L^4d^3/(4L^2+d^2)^{3/2})(C^2 - J^2\omega^4)}}{32L^4 - 48L^4d^3/(4L^2+d^2)^{3/2}} \quad \omega = 2\pi/T$$

$$G = d^3 \left(\frac{-C + \sqrt{C^2 + (2 - 3d^3/(4L^2+d^2)^{3/2})(C^2 - 16\pi^4 J^2/T^4)}}{4MmL^2(2 - 3d^3/(4L^2+d^2)^{3/2})} \right)$$

Remarque :

La période du pendule $T = 2\pi/\omega$ est supérieure à sa période propre qui vaut $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$

Exemple : Expérience historique de Cavendish

$M = 160,0 \text{ kg}$, $m = 725 \text{ g}$, $L = 0,9 \text{ m}$, $d = 0,2 \text{ m}$, $J = 1,2 \text{ kg.m}^2$ $C = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$

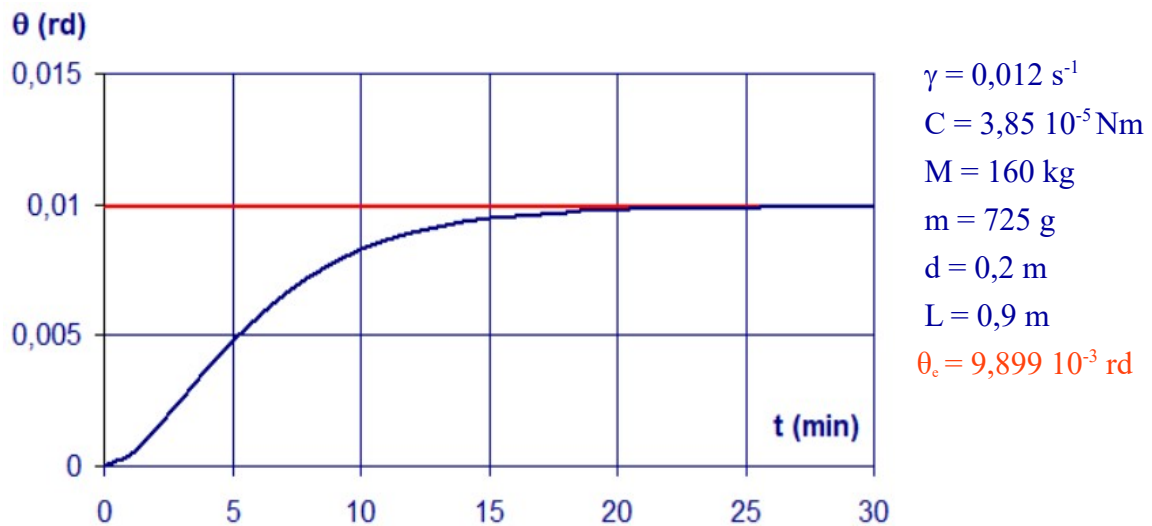
on obtient : $T = 1164,3 \text{ s}$ ($T_0 = 1109,3 \text{ s}$)

$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

3.2 Mesure de l'angle de rotation à l'équilibre θ_e

Cette méthode demande que le pendule soit freiné par frottement fluide autre que l'air sinon l'expérience serait interminable. D'autre part, l'angle θ_e étant faible $\sim 0,6^\circ$, il est difficile de le mesurer précisément car pour un angle aussi faible, les vibrations parasites venant du sol ne sont plus négligeables. C'est donc une expérience assez délicate à réaliser.

Cependant Cavendish réussit à obtenir une valeur supérieure de seulement 1 % à la valeur admise aujourd'hui ($6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$).



$$\omega_0^2 = C/J - 4GMmL^2/(Jd^3) \quad A = 2GMmL(1/(Jd^2) - d/(J(4L^2+d^2)^{3/2})) \quad B = 6 GMmL^3/(Jd^4)$$

$$\omega_0^2 \theta_e = A + B \theta_e^2 \quad (\text{Cf 2.1})$$

$$C\theta_e/J - 4GMmL^2\theta_e/(Jd^3) = 2GMmL(1/(Jd^2) - d/(J(4L^2+d^2)^{3/2})) + 6 GMmL^3/(Jd^4) \theta_e^2$$

$$2GMmL(1/d^2 - d/(4L^2+d^2)^{3/2}) + 2L\theta_e/d^3 + 3L^2\theta_e^2/d^4 = C\theta_e$$

$$G = \frac{C d^2 \theta_e}{2 M m L \left(1 - \frac{d^3}{(4L^2+d^2)^{3/2}} + \frac{2L}{d} \theta_e + \frac{3L^2}{d^2} \theta_e^2 \right)}$$

Exemple : Expérience historique de Cavendish

$M = 160,0 \text{ kg}$, $m = 725 \text{ g}$, $L = 0,9 \text{ m}$, $d = 0,2 \text{ m}$, $C = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$

on obtient : $\theta_e = 9,899 \cdot 10^{-3} \text{ rd}$ ($\approx 34'$)

$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$