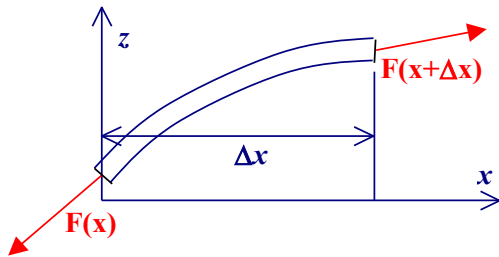


On étudie une membrane élastique tendue lorsqu'elle est mise en vibration résonnante. Les ondes produites se propagent dans la membrane, se réfléchissent sur les bords et donnent une onde stationnaire dont la position des nœuds dépend du mode de vibration de la membrane. Les nœuds de vibration forment une figure matérialisées par des grains de sable qui s'y accumulent. C'est une figure de Chladni.

1. Célérité de l'onde sur une membrane élastique tendue



ρ masse volumique de la membrane
 e épaisseur de la membrane
 Δb largeur de l'échantillon de membrane
 Δa longueur de l'échantillon de membrane
 F_a force de tension sur l'échantillon (direction Oa)
 $P = F_a / (e\Delta b)$ contrainte exercée sur la membrane
 Elle est supposée uniforme : $P = \text{constante}$

Équation de Newton appliquée à l'échantillon

$m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z$ On néglige le poids de l'échantillon devant F

$$F_z \approx F_x \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x+\Delta x)} - F_x \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x)} + F_y \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(y+\Delta y)} - F_y \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(y)} \quad m = \rho e \Delta x \Delta y$$

$$\rho e \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F_x \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x+\Delta x)} - F_x \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(x)} + F_y \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(y+\Delta y)} - F_y \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(y)}$$

$$\rho e \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x + F_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta y$$

$$F_x / (e\Delta y) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + F_y / (e\Delta x) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

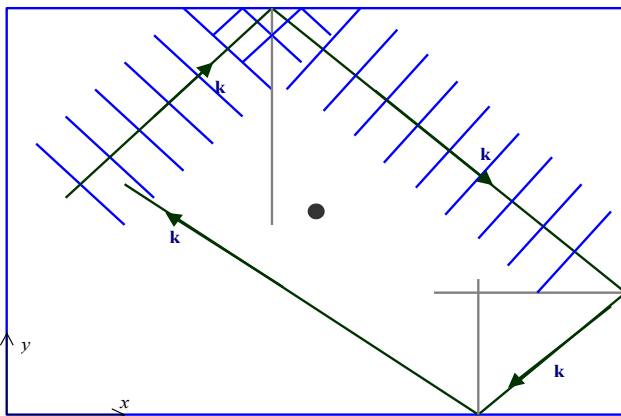
$$P \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \text{De la forme : } \nabla^2 z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

Équation d'une onde à 2 dimensions de célérité $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

2. Étude de l'onde stationnaire sur une membrane rectangulaire.

2.1. Schéma



L largeur de la membrane
 H hauteur de la membrane

2.2 Onde stationnaire

Une onde sinusoïdale peut se représenter par une fonction du type :

$$z_1 = a \exp(j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) = a \exp(j(\omega t - k_x x - k_y y)) \quad \mathbf{k} = \omega/c$$

Si elle se réfléchit sur un bord vertical, elle change de sens selon x et s'inverse, on obtient

$$z_2 = -a \exp(j(\omega t + k_x x - k_y y))$$

Si elle se réfléchit sur un bord horizontal, elle change de sens selon y et s'inverse, on obtient

$$z_3 = -a \exp(j(\omega t - k_x x + k_y y))$$

Si elle se déplace vers les x et les y négatifs, on obtient

$$z_4 = a \exp(j(\omega t + k_x x + k_y y))$$

Ces quatre ondes se superposent :

$$z = a (\exp(j(-k_x x - k_y y)) - \exp(j(k_x x - k_y y)) - \exp(j(-k_x x + k_y y)) + \exp(j(k_x x + k_y y))) \exp(j\omega t)$$

$$z = a (\exp(j k_x x) - \exp(-j k_x x)) (\exp(j k_y y) - \exp(-j k_y y)) \exp(j\omega t)$$

$$z = -4 a \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{j\omega t}$$

2.3 Modes

Les bords étant fixes doivent correspondre à un nœud de vibration.

Donc en $x = 0$ ou en $y = 0$, $z = 0$. C'est bien le cas.

$$\text{En } x = L, z = 0 \rightarrow \sin(k_x L) = 0 \rightarrow k_x L = m \pi \quad \mathbf{m \text{ entier} > 0} \quad \mathbf{k_x = m \pi / L}$$

$$\text{En } y = H, z = 0 \rightarrow \sin(k_y H) = 0 \rightarrow k_y H = n \pi \quad \mathbf{n \text{ entier} > 0} \quad \mathbf{k_y = n \pi / H}$$

$$z_{mn} = -4 a \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{H}\right) e^{j\omega t}$$

L'amplitude de l'onde est donc :

$$\mathbf{A_{mn} = 4 a \sin\left(\frac{m \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{H}\right)}$$

Chaque valeur de n et de m correspond à un mode de vibration de la membrane.

Les nœuds se trouvent aux coordonnées suivantes :

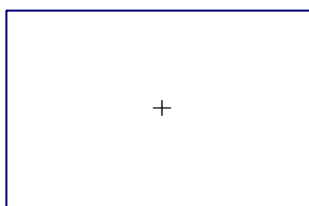
$$\mathbf{x = i L/m} \quad \mathbf{i \text{ entier}} \quad \mathbf{0 \leq i \leq m}$$

$$\mathbf{y = j H/n} \quad \mathbf{j \text{ entier}} \quad \mathbf{0 \leq j \leq n}$$

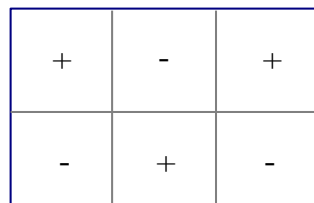
Longueur d'onde et fréquence des modes :

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}}} \quad N_{mn} = \frac{c}{\lambda_{mn}} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{H^2}}$$

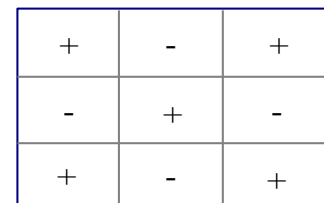
Lignes des nœuds (Figures de Chladni)



$$m = 1, \quad n = 1$$



$$m = 3, \quad n = 2$$



$$m = 3, \quad n = 3$$

La solution générale est la somme des z_{mn} pour toutes les valeurs de m et n

3. Étude de l'onde stationnaire sur une membrane circulaire de rayon R.

3.1. Équation différentielle

On part de l'équation générale des ondes :

$$\nabla^2 z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

En coordonnées polaires (r, θ), cela donne :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

On teste $z = A Y(r) \cos(m\theta + \theta_0) \cos(\omega t + \phi)$ m entier car il faut : $\cos(m(\theta + 2\pi)) = \cos(m\theta)$

$$\left(\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dY}{dr} \right) \cos(m\theta + \theta_0) \cos(\omega t + \phi) - \frac{m^2 Y \cos(m\theta + \theta_0) \cos(\omega t + \phi)}{r^2} + \frac{\omega^2 Y \cos(m\theta + \theta_0) \cos(\omega t + \phi)}{c^2} = 0$$

On a donc : $\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dY}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) Y = 0$

$$r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} + r \frac{dY}{dr} + \left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - m^2 \right) Y = 0 \quad m \text{ entier}$$

3.2. Solution de l'équation

$r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} + r \frac{dY}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} r^2 - m^2 \right) Y = 0$ est l'équation de Bessel d'ordre m de solution :

$Y = J_m(\omega/c r)$ Fonction de Bessel d'ordre m

$$z_m(r, \theta) = A_m J_m\left(\frac{\omega r}{c}\right) \cos(m\theta + \theta_0) \cos(\omega t + \phi) \quad m \text{ entier} > 0 \quad (\phi \text{ et } \theta_0 \text{ quelconques})$$

3.3. Modes

Le bord du disque étant fixe doit être un nœud donc quand $r = R$, on doit avoir une solution de la fonction $J_m(\omega/c r) = 0$. Ces valeurs se trouvent aux valeurs X_{0mn} **

On obtient donc $\omega_{mn} = c X_{0mn}/R$

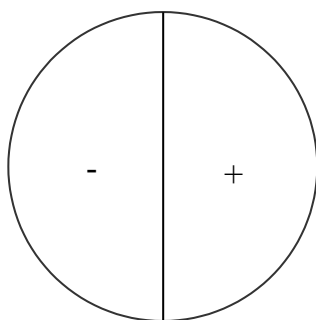
$$z_{mn}(r, \theta) = A_{mn} J_m\left(\frac{X_{0mn} r}{R}\right) \cos(m\theta + \theta_0) \cos\left(\frac{X_{0mn}}{R} c t + \phi\right) \quad \text{pour le mode } m, n$$

Longueur d'onde et fréquence des modes :

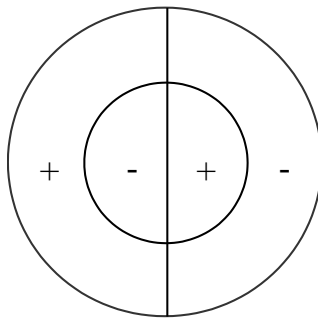
$$\omega_{mn} = c X_{0mn}/R = 2\pi c/\lambda_{mn}$$

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi R}{X_{0mn}} \quad N_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{c X_{0mn}}{2\pi R} \quad c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

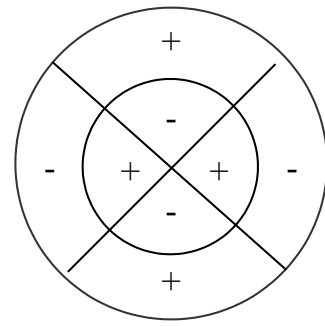
Lignes des nœuds (Figures de Chladni)



$m = 2, n = 1 \quad \theta_0 = 0$



$m = 2, n = 2 \quad \theta_0 = 0$

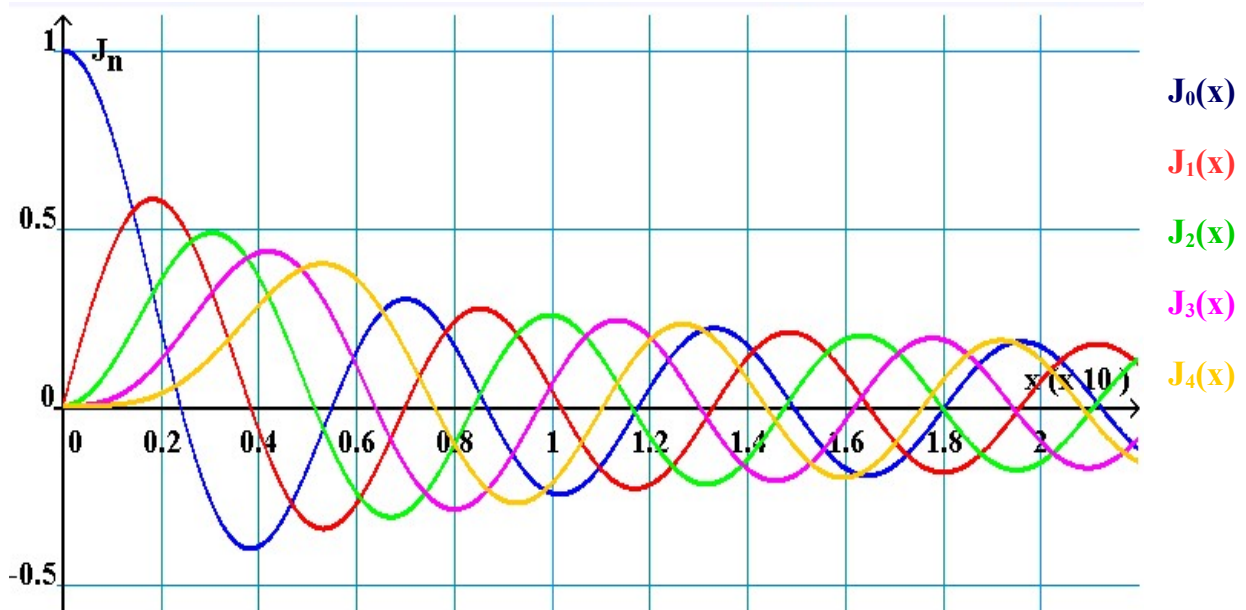


$m = 3, n = 2 \quad \theta_0 = 0$

La solution générale est la somme des z_{mn} pour toutes les valeurs de m et n

Fonctions de Bessel

$$J_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(x/2)^{2i+m}}{i!(i+m)!}$$



J_{m-1}	X_{0m1}	X_{0m2}	X_{0m3}	X_{0m4}	X_{0m5}	X_{m1}	X_{m2}	X_{m3}	X_{m4}	X_{m5}
J_0	2,4	5,52	8,66	11,79	14,93	3,84	7	10,18	13,33	16,48
J_1	3,83	7,02	10,17	13,32	16,47	1,85	5,34	8,54	11,71	14,87
J_2	5,14	8,42	11,62	14,8	17,96	3,06	6,71	9,97	13,18	16,35
J_3	6,38	9,76	13,02	16,22	19,41	4,21	8,02	11,35	14,6	17,8
J_4	7,59	11,06	14,37	17,62	20,83	5,32	9,29	12,7	15,97	19,2