

La théorie de l'interaction entre la matière et la lumière relève de la mécanique quantique, mais il se trouve que souvent, on peut retrouver une version approchée de la théorie quantique en étudiant le mouvement d'un électron relié à un ressort quand il est soumis au champ électrique de l'onde lumineuse.

## 1. Notations

$N_a$  : Nombre d'Avogadro =  $6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$c$  : vitesse de la lumière dans le vide =  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$q$  : charge de l'électron =  $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

$m$  : masse de l'électron =  $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$\epsilon_0$  : permittivité du vide =  $8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

$N$  : nombre d'électrons actifs/ $\text{m}^3$

$\omega_0$  : pulsation propre de l'électron

$\omega$  : pulsation de l'onde lumineuse

$\lambda = 2\pi c/\omega$  : longueur d'onde de l'onde lumineuse

$P$  : polarisation du diélectrique

$E$  : champ électrique de l'onde lumineuse

$E_d$  : champ électrique à l'intérieur du diélectrique

$n = c/v$  : indice du diélectrique (  $v$  vitesse de la lumière dans le diélectrique )

## 2. Polarisabilité $\alpha$ du diélectrique

On a un oscillateur harmonique amorti subissant une force  $F = qE_d$  donc

$$m x'' + m \gamma x' + m \omega_0^2 x = F = q E_d = q E_0 \exp(j(\omega t - z/\lambda))$$

La solution est  $x = q/(m(\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega)) E_d$

Le déplacement de l'électron crée un dipôle de polarisation  $p = q x$

On définit la polarisabilité  $\alpha$  par  $p = \epsilon_0 \alpha E_d$  avec

$$\alpha = \frac{q^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega)} \quad \text{L'expression quantique est} \quad \alpha = \frac{q^2}{m \epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{(\omega_i^2 - \omega^2 + j \gamma_i \omega)}$$

L'expression classique considère  $f_0 = 1$  et  $f_i = 0$  pour  $i > 0$ . On obtient un bon résultat car le premier terme de la somme est largement prépondérant. On pourrait d'ailleurs retrouver l'expression quantique en considérant plusieurs ressorts de pulsation propre  $\omega_i$ .

## 3. Polarisation volumique $P$ en un point du diélectrique

Dans un petit volume  $\Delta V$  de taille très inférieure à  $\lambda$ , mais contenant  $N\Delta V$  dipôles (quelques centaines), le champ est essentiellement uniforme et sa polarisation  $P \Delta V$  est la somme des polarisations  $p$  :

$$P \Delta V = N \Delta V p \quad \text{donc} \quad P = N p = N \epsilon_0 \alpha E_d$$

Il faut maintenant déterminer  $E_d$ .  $E_d$  est la somme du champ  $E$  et du champ  $E_p$  créé par les dipôles contenus dans le diélectrique. Pour calculer ce champ, on utilise un modèle qui consiste à dire que chaque molécule du diélectrique est plongée dans le champ existant à

l'intérieur d'une petite sphère creusée à l'intérieur du diélectrique polarisé considéré comme un ensemble homogène. L'avantage de ce modèle un peu approximatif est qu'on sait calculer ce champ et qu'il donne un résultat correct.

Le champ  $E_p$  à l'intérieur d'une sphère creusée dans un diélectrique polarisé vaut :

$$E_p = P/(3\epsilon_0) \quad \text{donc} \quad E_d = E + P/(3\epsilon_0) \quad \text{et donc}$$

$$P = N \epsilon_0 \alpha (E + P/(3\epsilon_0)) \quad \text{ce qui donne :} \quad \mathbf{P} = \frac{N \alpha}{1 - \frac{N \alpha}{3}} \epsilon_0 \mathbf{E}$$

## 4. Indice de réfraction du diélectrique

### 4.1. Indice de réfraction complexe

Dans un diélectrique homogène et isotrope :  $P = N \alpha / (1 - N \alpha / 3) \epsilon_0 E$

Équations de Maxwell dans un diélectrique homogène et isotrope :

$$\text{div} (E + P/\epsilon_0) = 0 = \text{div} ((1 + N \alpha / (1 - N \alpha / 3))E) = 0 \quad \text{donc} \quad \text{div} E = 0 \quad (1)$$

$$\text{rot} E = - \partial B / \partial t \quad (2)$$

$$\text{div} B = 0 \quad (3)$$

$$\text{rot} B = 1/c^2 \partial (E + P/\epsilon_0) / \partial t \quad (4)$$

On prend le rotationnel de (2) :

$$\text{rot}(\text{rot} E) = - \text{rot} \partial B / \partial t = - \partial (\text{rot} B) / \partial t = - 1/c^2 \partial^2 (E + P/\epsilon_0) / \partial t^2$$

$$\text{rot}(\text{rot} E) = - 1/c^2 \partial^2 ((1 + N \alpha / (1 - N \alpha / 3))E) / \partial t^2 = - (1 + N \alpha / (1 - N \alpha / 3)) / c^2 \partial^2 E / \partial t^2$$

$$\text{rot}(\text{rot} E) = \nabla (\text{div} E) - \nabla^2 E = - \nabla^2 E \quad \text{car} \quad \text{div} E = 0 \quad (1) \quad \text{donc :}$$

$$\nabla^2 E - (1 + N \alpha / (1 - N \alpha / 3)) / c^2 \partial^2 E / \partial t^2 = 0 \quad \text{Équation de la forme}$$

$$\nabla^2 E - 1/v^2 \partial^2 E / \partial t^2 = 0 \quad \text{qui est l'équation d'une onde se propageant à la vitesse } v \text{ donc}$$

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{c}^2/v^2 = \mathbf{1} + N \alpha / (1 - N \alpha / 3) \quad \text{ce qui peut s'écrire :}$$

$$3(\mathbf{n}^2 - 1) / (\mathbf{n}^2 + 2) = N \alpha \quad \text{donc :}$$

$$\frac{3(\mathbf{n}^2 - 1)}{(\mathbf{n}^2 + 2)} = N \alpha = \frac{N q^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega)}$$

### 4.2. Indice de réfraction réel et coefficient d'absorption du diélectrique

D'après l'équation précédente, l'indice est un nombre complexe de la forme :

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_r - j \mathbf{n}_i$$

L'équation de propagation d'une onde de pulsation  $\omega$  et de longueur d'onde dans le vide  $\lambda$  dans la direction Ox dans un milieu d'indice  $\mathbf{n}$  est :

$$E(t) = E \exp(j(\omega t - 2\pi \mathbf{n} x / \lambda)) = E \exp(j(\omega t - 2\pi (\mathbf{n}_r - j \mathbf{n}_i) x / \lambda))$$

$$E(t) = E \exp(-2\pi \mathbf{n}_i x / \lambda) \exp(j(\omega t - 2\pi \mathbf{n}_r x / \lambda)) = E e^{-\epsilon x} \exp(j(\omega t - 2\pi \mathbf{n}_r x / \lambda))$$

$\mathbf{n}_r$  est l'indice de réfraction et  $\epsilon = 2\pi \mathbf{n}_i / \lambda$  est le coefficient d'absorption du diélectrique

Dans un milieu transparent,  $\gamma$  est faible et  $\epsilon$  n'a de valeur significative que si  $\omega \simeq \omega_0$ . Dans tous les autres cas, on peut négliger  $\gamma$ . On a alors :  $\mathbf{n} \simeq \mathbf{n}_r$  et  $\epsilon \simeq 0$ .

$$\frac{3(\mathbf{n}^2 - 1)}{(\mathbf{n}^2 + 2)} = N \alpha \simeq \frac{N q^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{Équation de Clausius-Mosotti}$$

## 5. Expression approchée de l'indice d'un gaz. Loi de Gladstone

### 5.1. Expression de l'indice d'un gaz

$$3(n^2 - 1)/(n^2 + 2) = N \alpha$$

Pour un gaz  $n$  est très proche de 1, donc  $n^2 + 2 \simeq 3$  et on peut donc simplifier l'expression en :

$$n^2 = 1 + N \alpha \simeq 1 + N q^2/(m/\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)) \quad \text{Comme } N \alpha \ll 1 \text{ on peut écrire :}$$

$$n = 1 + \frac{N \alpha}{2} \simeq 1 + \frac{N q^2}{2 m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

D'autre part pour la plupart des gaz incolores,  $\omega_0^2 \gg \omega^2$  donc

$$n = 1 + N q^2/(2m\epsilon_0 \omega_0^2) (1 + \omega^2/\omega_0^2) = 1 + N q^2/(2m\epsilon_0 \omega_0^2) (1 + \lambda_0^2/\lambda^2) \text{ de la forme}$$

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{avec} \quad A = 1 + \frac{N q^2}{2 m \epsilon_0 \omega_0^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{2 \pi^2 c^2 N q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^4}$$

Exemple : L'air. On a une formule empirique pour l'air à 15°C sous  $P_{\text{atm}}$  normale :

$$n = 1,00027253 + 1,815 \cdot 10^{-18}/\lambda^2$$

$$\text{donc } \omega_0^2 = 4\pi^2 c^2 (A - 1)/B = 5,331 \cdot 10^{32} \quad \text{et} \quad N = 2m\epsilon_0 \omega_0^2/q^2 (A - 1) = 9,117 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

1m<sup>3</sup> d'air dans ces conditions contient  $N_m = N_a P/(RT) = 2,5463 \cdot 10^{25}$  molécules

L'air contient 79% de N<sub>2</sub> (2 orbitales  $\pi$  (4 e<sup>-</sup>)) et 21% de O<sub>2</sub> (1 orbitale  $\pi$  (2 e<sup>-</sup>)).

Soit  $k = 4 \cdot 0,79 + 2 \cdot 0,21 = 3,58$  le nombre moyen d'e<sup>-</sup> actifs par molécule

$$N_e = k N_m = 9,116 \cdot 10^{25}$$

### 5.2. Loi de Gladstone

$$n = 1 + N \alpha/2$$

$N$  est proportionnel au nombre de molécules de gaz/m<sup>3</sup> =  $k \mu/M N_a$  ( ex Air :  $k = 3,58$  )

$\mu$  masse volumique du gaz  $M$  masse molaire du gaz et  $N_a$  Nombre d'Avogadro

$$n = 1 + k N_a \alpha/(2M) \mu$$

On pose  $k N_a \alpha/(2M) = K_{\lambda} = k N_a q^2/(2M m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)) = k N_a q^2/(8\pi^2 c^2 M m \epsilon_0 (1/\lambda_0^2 - 1/\lambda^2))$

$$n = 1 + K_{\lambda} \mu \quad \text{Loi de Gladstone}$$

D'après la loi des gaz parfaits  $P = n/V RT = \mu/M RT$  donc  $\mu = PM/(RT)$

$$n = 1 + K_{\lambda} \frac{PM}{RT}$$

## 6. Expression approchée de l'indice d'un diélectrique incolore

$$n^2 = 1 + N \alpha/(1 - N \alpha/3) \quad \alpha \simeq q^2/(m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2))$$

Pour un diélectrique incolore comme le verre par exemple,  $\omega_0^2 \gg \omega^2$

$$1 + N \alpha/(1 - N \alpha/3) \simeq 1 + N q^2/(m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2))/(1 - N q^2/(3m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)))$$

En utilisant des développements limités au premier ordre et après quelques calculs fastidieux, on obtient :

$$n \simeq A + \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{avec}$$

$$A = \sqrt{1 + \frac{Nq^2}{m\epsilon_0\omega_0^2 \left(1 - \frac{Nq^2}{3m\epsilon_0\omega_0^2}\right)}} \quad \text{et} \quad B = \frac{2\pi^2 c^2 (A^4 + A^2 - 2)}{3A\omega_0^2}$$

Exemple d'un verre :  $n = 1,48 + 3,6 \cdot 10^{-15}/\lambda^2$  donne  $\omega_0^2 = 5,54 \cdot 10^{32}$  et  $N = 5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$   
 $\mu = 2500 \text{ kg/m}^3$  donne  $N_m = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$  on a donc 2 e<sup>-</sup> actifs par «molécule»

## 7. Loi de Gladstone pour les liquides et les solides transparents

A l'origine, la loi de Gladstone est une relation empirique s'appliquant correctement à tous les milieux transparents.

Pour les gaz,  $n - 1$  est proportionnel à  $N$  et  $N$  proportionnel à  $\mu$  donc  $n - 1 = K_\lambda \mu$

Pour les liquides et les solides,  $n$  n'est pas du tout proportionnel à  $N$ , alors pourquoi la loi de Gladstone s'applique-t-elle quand même?

C'est parce que les liquides et les solides sont quasi incompressibles et très peu dilatables avec la température. Leur volume varie très peu donc  $N$  varie très peu, de même pour  $\mu = N/k$ .

$$dn/d\mu = dn/dN \cdot dN/d\mu$$

$dn/dN$  est une fonction de  $N^*$  et  $N$  est quasiment constant donc  $dn/dN$  est quasiment constant :  $dn/dN \simeq K = \text{cste}$ ,

$$dn/d\mu \simeq K \cdot dN/d\mu = K \cdot k = K_\lambda = \text{cste} \quad \text{donc} \quad n \simeq K_\lambda \mu + C. \quad \text{Si } \mu = 0, n = 1 \quad \text{donc } C = 1$$

$$n \simeq 1 + K_\lambda \mu \quad \text{Loi de Gladstone}$$

La loi s'applique donc bien aux liquides et aux solides à cause de la très faible marge de variation de  $\mu$ .

$$* \quad n = \sqrt{1 + \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}}} \quad \text{donc} \quad \frac{dn}{dN} = \frac{1}{2 \sqrt{1 + \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}}} \left(1 - \frac{N\alpha}{3}\right)^2}$$