

1. Expression

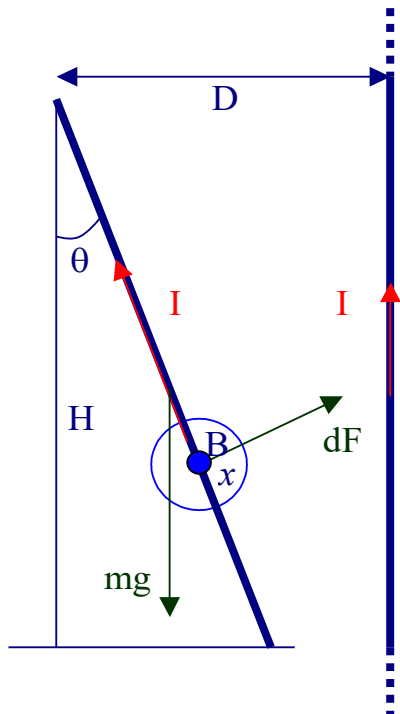
Un élément de circuit de longueur dL parcouru par un courant I , placé dans un champ magnétique B subit une force $dF = I dL \wedge B$. Cette force est la résultante des forces de Lorentz appliquées aux N électrons de charge q en mouvement dans l'élément dL .

$$dF = N q v \wedge B. \quad v = dL/dt \quad \text{et} \quad I = dQ/dt = Nq/dt \quad \text{donc}$$

$$dF = I dL \wedge B. \quad \text{C'est la force de Laplace.}$$

2. Dispositif à fils parallèles

2.1 Schéma



Une longue tige verticale fixe est placée à la distance D d'une petite tige verticale mobile de masse m . Les deux tiges sont parcourues par un même courant I .

La tige mobile plonge dans un bain de mercure placé à une distance H de son axe.

Elle subit la force de Laplace due au champ B créé par la tige fixe. Elle s'incline jusqu'à ce que le moment de son poids mg équilibre le moment de la force de Laplace.

θ Angle de rotation de la tige à l'équilibre

Ce dispositif peut être considéré comme un ampèremètre non linéaire peu sensible.

C'est plutôt une illustration du lien entre l'ampère et les autres unités du système MKS. Le dispositif ne nécessitant pas la mesure d'un champ magnétique externe.

2.2. Équilibre de la tige pour des courants de même sens

La tige fixe crée un champ magnétique $B = \mu_0 I / (2\pi d)$ à la distance d (formule pour une tige infinie, il faut donc une tige fixe de taille très supérieure à D et à H)

Chaque élément dx de la tige mobile subit une force différente car sa distance d à la tige fixe dépend de sa distance x à l'axe. $d = D - x \sin\theta$

$B = \mu_0 I / (2\pi(D - x \sin\theta))$ La force dF subie par l'élément dx est donc:

$$dF = I dx B = \mu_0 I^2 / (2\pi(D - x \sin\theta)) dx \quad (B \text{ et } dx \text{ sont perpendiculaires})$$

le moment correspondant est $dM = dF x$ car dF est perpendiculaire à la tige, donc :

$$dM = \mu_0 I^2 / (2\pi D) x / (1 - x \sin\theta / D) dx \quad \text{on pose } u = x \sin\theta / D \quad dx = D / \sin\theta du$$

$$dM = \mu_0 I^2 D / (2\pi \sin^2\theta) u / (1 - u) du$$

Il faut intégrer cette expression de $x = 0$ ($u = 0$) à $x = H/\cos\theta$ ($u = H/D \tan\theta$)

La primitive de $u/(1-u)$ est $-u - \ln(1-u)$ donc

$$M = \mu_0 I^2 D / (2\pi \sin^2\theta) [-u - \ln(1-u)]_0^{H/D \tan\theta}$$

$$M = \mu_0 I^2 D / (2\pi \sin^2\theta) (-H/D \tan\theta - \ln(1 - H/D \tan\theta))$$

A l'équilibre, on a $M = mgH/2 \tan\theta$

$$\mu_0 I^2 D / (2\pi) (-H/D \tan\theta - \ln(1 - H/D \tan\theta)) = mgH/2 \tan\theta \sin^2\theta = mgH/2 \tan^3\theta / (1 + \tan^2\theta)$$

Si on pose $u = H/D \tan\theta$

$$-u - \ln(1-u) = \pi mgD^2 / (\mu_0 H^2 I^2) u^3 / (1 + u^2 D^2 / H^2) \quad \text{avec } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$-u - \ln(1-u) = mgD^2 / (4 \cdot 10^{-7} H^2 I^2) u^3 / (1 + u^2 D^2 / H^2) \quad \text{et} \quad \theta = \arctan(D/H u)$$

La solution de cette équation n'est pas évidente...

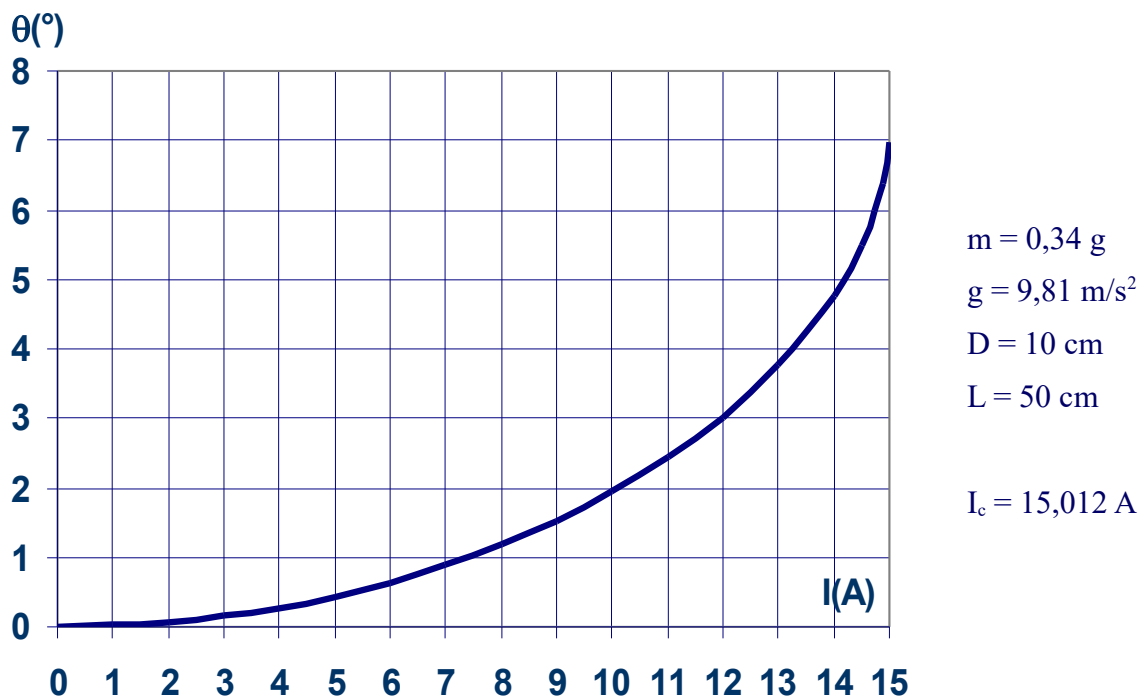
Il faut avoir recours à une résolution numérique.

La solution de l'équation dépend de la valeur de I . Il existe une valeur critique I_c au delà de laquelle il n'y a pas de solution. L'équilibre est alors impossible.

Pour $I = I_c$, il existe une seule solution qui est instable. L'équilibre est encore impossible.

Pour $I < I_c$, il existe deux solutions, mais seule la valeur la plus faible est stable. C'est donc la seule valeur possible pour avoir l'équilibre.

Les solutions quand elles existent sont positives comme attendu.



Remarque : Solution approchée.

Si $u \ll 1$, on peut faire un développement limité en u^3 avec $\tan\theta = D/H u \simeq \theta$

$$-u - \ln(1-u) \simeq u^2/2 + u^3/3 = K u^3 / (1 + u^2 D^2 / H^2) \simeq K u^3$$

$$u \simeq 1/(2K - 2/3)$$

$$\theta \simeq 1/(mgD/(2 \cdot 10^{-7} H I^2) - 2 H/(3D))$$

L'inconvénient, c'est qu'il faut que u soit petit et donc $\theta \simeq D/H u$ encore plus petit.

Dans l'exemple précédent si on prend $u < 0,1$, il faut $\theta < 1,15^\circ$, ce qui est bien faible!

2.3 Équilibre de la tige pour des courants contraires

La seule différence est le signe de M qui s'inverse, on a donc

$$M = \mu_0 I^2 D / (2\pi \sin^2 \theta) (H/D \tan \theta + \ln(1 - H/D \tan \theta))$$

A l'équilibre, on a $M = mgH/2 \tan \theta$ ($\theta < 0$)

$$\mu_0 I^2 D / (2\pi) (H/D \tan \theta + \ln(1 - H/D \tan \theta)) = mgH/2 \tan \theta \sin^2 \theta = mgH/2 \tan^3 \theta / (1 + \tan^2 \theta)$$

Si on pose $u = H/D \tan \theta$

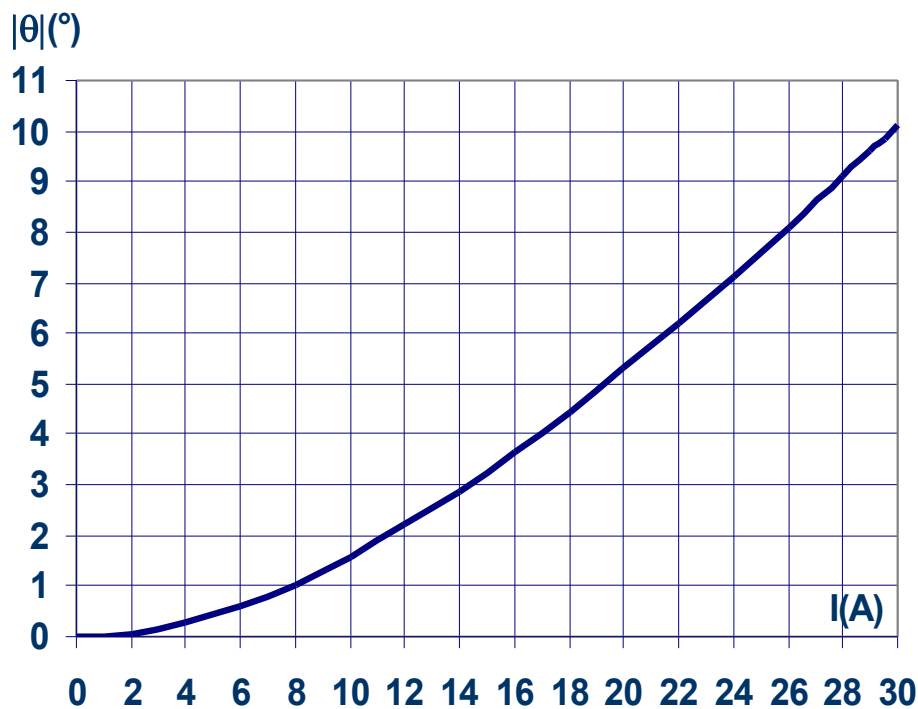
$$u + \ln(1 - u) = \pi mgD^2 / (\mu_0 H^2 I^2) u^3 / (1 + u^2 D^2 / H^2) \quad \text{avec } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$u + \ln(1 - u) = mgD^2 / (4 \cdot 10^{-7} H^2 I^2) u^3 / (1 + u^2 D^2 / H^2) \quad \text{et} \quad \theta = \arctan(D/H u)$$

La solution de cette équation n'est pas plus évidente...

Il faut avoir recours à une résolution numérique.

Il existe une seule solution et elle est négative comme attendu.



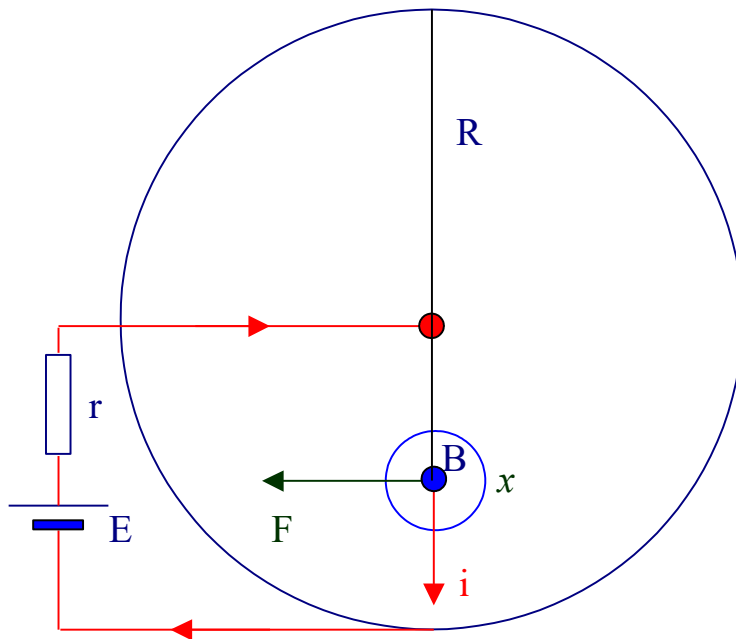
$m = 0,34 \text{ g}$
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
 $D = 10 \text{ cm}$
 $L = 50 \text{ cm}$

Remarque : On peut obtenir la même solution approchée pour $u \ll 1$ que précédemment :

$$\theta \simeq -1 / (mgD / (2 \cdot 10^{-7} H I^2) - 2 H / (3D))$$

3. Roue de Barlow pleine

3.1 Schéma



Une roue cylindrique conductrice parcourue par un courant i est plongée dans un champ magnétique uniforme B .

Elle subit la force de Laplace F due au champ B , ce qui la met en rotation. La rotation crée une f.e.m induite e selon la loi de Lenz.

M Masse de la roue en kg

R Rayon de la roue en m

E F.e.m du générateur en V

r résistance du circuit en Ω

On néglige tous les frottements.

3.2. Étude du dispositif

3.2.1 Mise en mouvement de la roue ($E > 0$)

La force de Laplace subie par un élément dx est

$$dF = i dx B, \text{ elle crée un moment } dM = dF x = i B x dx$$

Il faut intégrer cette expression de $x = 0$ à $x = R$ donc

$$M = iB [x^2/2]_0^R = iBR^2/2$$

Expression de i

$$i = (E - e)/r \quad e \text{ étant la f.c.e.m induite}$$

$$de = B v dx \text{ avec } v = \omega x \text{ donc } de = B \omega x dx$$

Il faut intégrer cette expression de $x = 0$ à $x = R$ donc

$$e = B \omega [x^2/2]_0^R = B \omega R^2/2$$

$$M = BR^2/2 (E - B \omega R^2/2)/r$$

Loi de Newton :

$$Jd\omega/dt = M = BR^2/2 (E - B \omega R^2/2)/r$$

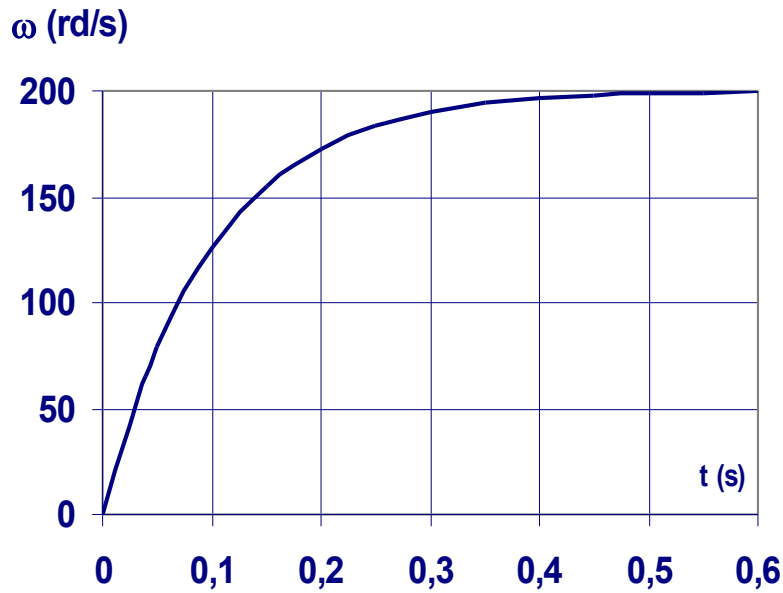
Pour une roue cylindrique $J = MR^2/2$ donc

$$MR^2/2 \omega' = BR^2/2 (E - B \omega R^2/2)/r$$

$$d\omega/dt + B^2R^2/(2Mr) \omega = B E/(Mr) \quad \text{A } t = 0 \quad \omega = 0$$

La solution est :

$$\omega = \omega_m (1 - \exp(-t/\tau)) \quad \text{avec } \omega_m = 2 ER^2/B \quad \text{et} \quad \tau = 2 Mr/(B^2 R^2)$$



$$M = 5 \text{ g}$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

$$E = 1 \text{ V}$$

$$r = 0,1 \text{ } \Omega$$

$$B = 1 \text{ T}$$

$$\omega_m = 200 \text{ rd/s}$$

$$\tau = 0,1 \text{ s}$$

3.2.2 Freinage de la roue ($E = 0$)

La force de Laplace subie par un élément dx est

$$dF = i \, dx \, B, \text{ elle crée un moment } dM = dF \, x = i \, B \, x \, dx$$

Il faut intégrer cette expression de $x = 0$ à $x = R$ donc

$$M = iB \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^R = iBR^2/2$$

Expression de i

$i = -e/r$ e étant la f.e.m induite

$$de = B \, v \, dx \text{ avec } v = \omega \, x \text{ donc } de = B \, \omega \, x \, dx$$

Il faut intégrer cette expression de $x = 0$ à $x = R$ donc

$$e = B \, \omega \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^R = B \, \omega \, R^2/2$$

$$M = -BR^2/2 \, (B \, \omega \, R^2/2)/r$$

Loi de Newton:

$$Jd\omega/dt = M = -B^2R^4/(4r) \, \omega$$

Pour une roue cylindrique $J = MR^2/2$ donc

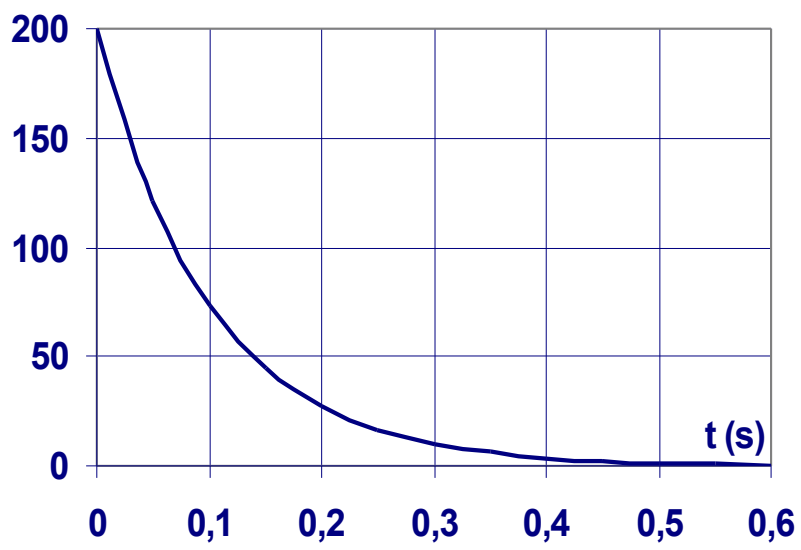
$$MR^2/2 \, \omega' = -B^2R^4/(4r) \, \omega$$

$$d\omega/dt + B^2R^2/(2Mr) \, \omega = 0 \quad \text{A } t = 0 \, \omega = \omega_m$$

La solution est :

$$\omega = \omega_m \exp(-t/\tau) \quad \text{avec } \omega_m = 2ER^2/B \quad \text{et} \quad \tau = 2Mr/(B^2R^2)$$

ω (rd/s)



$$M = 5 \text{ g}$$

$$R = 10 \text{ cm}$$

$$r = 0,1 \ \Omega$$

$$B = 1 \text{ T}$$

$$\omega_m = 200 \text{ rd/s}$$

$$\tau = 0,1 \text{ s}$$