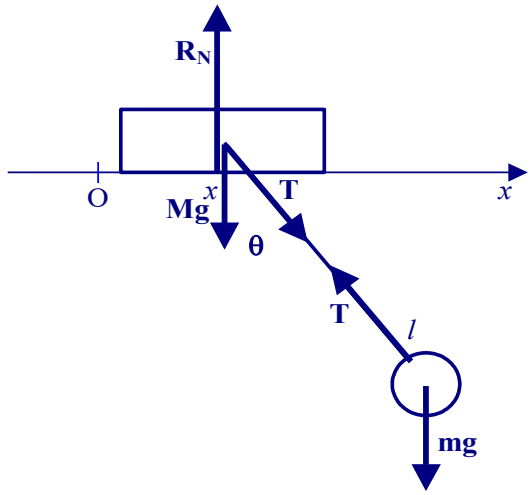
Animation

Pendule elliptique

Menu

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



Le chariot de masse M glisse sans frottement sur l'axe des x
Un pendule de masse m et de longueur l lui est fixé

Notations :

$\theta > 0$ à droite, sens trigonométrique.

Pendule :

$d\theta/dt = \theta'$ et $d^2\theta/dt^2 = \theta''$

Chariot :

$dx/dt = x'$ et $d^2x/dt^2 = x''$

2. Équations différentielles du mouvement

2.1. Approche Newtonienne.

Équations de Newton pour le pendule

Soit a_r l'accélération relativement à l'axe du pendule et a_c l'accélération de l'axe, on a :

$\mathbf{m\,a_r = T + mg - m\,a_c}$

On projette sur un axe parallèle au pendule et pointant vers l'axe :

$ml\theta'^2 = T - mg\cos\theta + mx''\sin\theta$

donc $T = ml\theta'^2 - mx''\sin\theta + mg\cos\theta$ (Relation 1)

$\mathbf{J\,d^2\theta/dt^2 = M_{mg} + M_T - M_{mac}}$

$ml^2\theta'' = -mgl\sin\theta + 0 - mx''\cos\theta\, l$

$l\theta'' = -g\sin\theta - x''\cos\theta$ (Relation 2)

Équation de Newton pour le chariot

$\mathbf{M\,a = T + Mg + R_N}$

On projette sur l'axe Ox :

$M\,x'' = T\sin\theta$, on remplace T par sa valeur donnée par la relation 1 :

$M\,x'' = ml\theta'^2\sin\theta - mx''\sin^2\theta + mg\cos\theta\sin\theta$

$(M + m\sin^2\theta)\,x'' = ml\theta'^2\sin\theta + mg\cos\theta\sin\theta$

$$\ddot{x} = \frac{\mathbf{m l\,\dot{\theta}^2 \sin\theta + m g \sin\theta\cos\theta}}{\mathbf{M + m\sin^2\theta}}$$

On remplace x'' dans la relation 2 :

$l\theta'' = -g\sin\theta - (ml\theta'^2\sin\theta\cos\theta + mg\sin\theta\cos^2\theta)/(M + m\sin^2\theta)$

$(M + m\sin^2\theta)\,l\theta'' = -Mg\sin\theta - mg\sin\theta\sin^2\theta - ml\theta'^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta\cos^2\theta$

$$\ddot{\theta} = \frac{-(M+m)g\sin\theta + m l \dot{\theta}^2 \sin\theta\cos\theta}{(M + m\sin^2\theta) l}$$

2.2. Approche Lagrangienne.

L = Ec - Ep = ½ mv^2 + ½ Mv_c^2 + mg l cosθ (altitude nulle sur l'axe du pendule)
$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (l\theta'\cos\theta + x')^2 + (- l\theta'\sin\theta)^2 = l^2\theta'^2 + x'^2 + 2\, l\, x'\, \theta'\cos\theta$
L = ½ $ml^2\theta'^2$ + ½ m x'^2 + m l x' θ' cosθ + ½ M x'^2 + mg l cosθ

Formules de Lagrange :

d(dL/dθ')/dt - dL/dθ = 0
$m l^2\theta'' + m l x'' \cos\theta - m l x' \sin\theta\, \theta' + m l x' \theta' \sin\theta + mg l \sin\theta = 0$ donc
$m l^2\theta'' + m l x'' \cos\theta + mg l \sin\theta = 0$
$l\theta'' = - g \sin\theta - x''\cos\theta$ (Relation 1)

d(dL/dx')/dt - dL/dx = 0
$m x'' + ml\theta'' \cos\theta - ml\theta'^2 \sin\theta + M x'' = 0$ donc
$(M + m)x'' = ml\theta'^2\sin\theta - ml\theta''\cos\theta$

On remplace θ'' par sa valeur donnée par la relation 1 :
$(M + m)x'' = ml\theta'^2\sin\theta + mg \sin\theta \cos\theta + mx''\cos^2\theta$
$(M + m\sin^2\theta)\, x'' = ml\theta'^2\sin\theta + mg \sin\theta \cos\theta$

$$\ddot{x} = \frac{m l \dot{\theta}^2 \sin\theta + m g \sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

On remplace x'' dans la relation 1 :
$l\theta'' = - g \sin\theta - (ml\theta'^2\sin\theta\cos\theta + m g \sin\theta \cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$
$(M + m \sin^2\theta)\, l\theta'' = - Mg \sin\theta - mg \sin\theta \sin^2\theta - ml\theta'^2\sin\theta \cos\theta - mg \sin\theta \cos^2\theta$

$$\ddot{\theta} = \frac{-(M+m)g\sin\theta + m l \dot{\theta}^2 \sin\theta\cos\theta}{(M + m\sin^2\theta) l}$$

3. Solution pour les petits angles

3.1. Équation différentielle.

Pour les petits angles, on prend sinθ = θ, cosθ = 1 et on néglige les puissances de θ supérieures à 1

$\theta'' = - ((M + m)g\, \theta + ml\theta'^2\, \theta)/(Ml)$

θ est sensiblement sinusoïdal donc $\theta'_{max} = \omega\, \theta_{max}$ et $\theta''_{max} = \omega^2\, \theta_{max}$ donc $\theta'^2\theta$ vaut au maximum $\omega^2\, \theta_{max}^3$ ce qui est négligeable devant θ_{max} si θ_{max} est petit. On peut donc négliger le dernier terme et on a alors :
$\theta'' = - (M + m)g\, \theta/(Ml)$ donc

$$\ddot{\theta} + \frac{(M+m)g}{Ml}\theta = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{m g}{M}\theta$$

3.2. Solution de l'équation pour le pendule

$\theta'' + (M + m)g/(Ml)\,\theta = 0$ donc

$\theta = \theta_m \cos(\omega t)$ avec $\omega = ((M + m)g/(Ml))^{1/2}$

et de période $T = 2\pi/\omega = 2\pi\,(Ml/((M + m)g))^{1/2}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M\,l}{(M+m)\,g}}$$

Remarque : Si $m << M$, on retrouve la période du pendule simple $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$ car alors, la masse M ne bouge pratiquement pas.

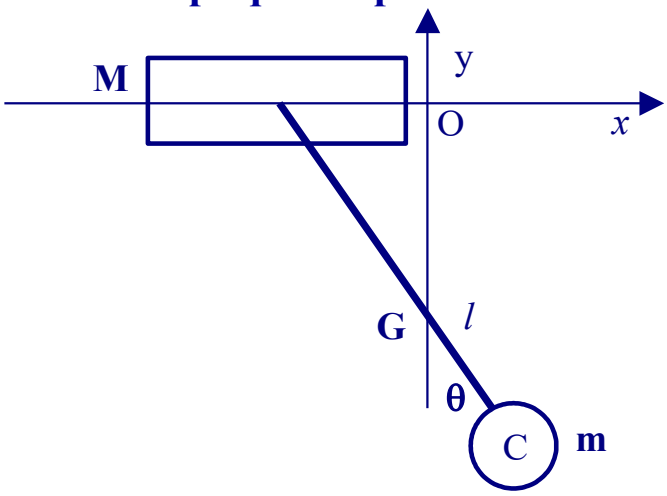
3.3. Solution de l'équation pour le chariot

$$\ddot{x} = \frac{m}{M} g\,\theta = \frac{m}{M} g\,\theta_m \cos(\omega t)$$ donc

$x = -\,m\,g/(M\omega^2)\,\theta_m \cos(\omega t) = -\,m\,g/((M + m)g)\,l\,\theta_m \cos(\omega t)$

$$x = -\frac{m\,l}{M+m}\theta = -\frac{m\,l}{M+m}\theta_m \cos(\omega t) \qquad \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{(M+m)\,g}{M\,l}}$$

4 Trajectoire elliptique du pendule



Soit G le centre de masse de l'ensemble chariot-pendule et C le centre de la masse m du pendule : $GC = M\,l/(M + m)$

L'ensemble chariot-pendule ne subit que des forces extérieures verticales **mg, Mg et R_N** donc G ne se déplace pas horizontalement car il ne subit pas de forces horizontales.

Si on prend un repère Ox passant par le centre du chariot et Oy passant par le centre de masse G de l'ensemble, alors le centre C de la masse m a les composantes

$x = GC \sin\theta = M\,l \sin\theta/(M + m)$ et $y = -\,l\cos\theta$ donc

$\sin^2\theta = x^2/(M\,l/(M + m))^2$ et $\cos^2\theta = y^2/l^2$ donc

$$\frac{y^2}{l^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{M\,l}{M+m}\right)^2} = 1$$

Équation d'une ellipse de grand axe l et de petit axe $M/(M + m)\,l$ centrée sur O.

Le point C se déplace sur une portion de cette ellipse.

G se déplace verticalement sur Oy entre $y = -\,m/(M + m)\,l\cos\theta_m$ et $y = -\,m/(M + m)\,l$