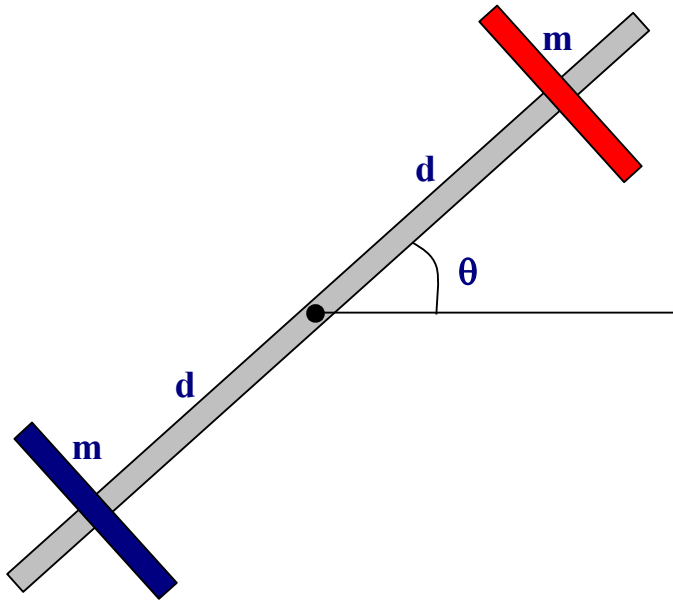


1. Schéma



C constante de torsion du fil
 J_0 Moment d'inertie de la tige

L Longueur de la tige

r Rayon de la tige

J Moment d'inertie total

m Masse de chaque disque

R Rayon des disques

e Épaisseur des disques

d distance entre m et l'axe

θ Angle de rotation de la tige =
 angle de torsion du fil

$M = - C \theta$ Moment de rappel exercé
 par le fil sur le pendule

2. Étude

2.1 Équation différentielle.

2ème loi de Newton en rotation :

$$J \theta'' = \Sigma M_F$$

$$J \theta'' = - C \theta - h \theta' \quad (h \theta' \text{ est un frottement visqueux})$$

$$\theta'' + h/J \theta' + C/J \theta = 0 \quad \text{On pose } \gamma = h/J \text{ et } \omega_0 = (C/J)^{1/2}$$

$$\theta'' + \gamma \theta' + \omega_0^2 \theta = 0$$

2.2 Solution de l'équation différentielle.

On cherche une solution du type $\theta = c e^{\alpha t}$

$$\alpha^2 c e^{\alpha t} + \gamma \alpha c e^{\alpha t} + \omega_0^2 c e^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2 + \gamma \alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_1 = -\gamma/2 + (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$$

$$\alpha_2 = -\gamma/2 - (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$$

$$\theta = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)$$

2.3 Solution apériodique $\gamma > 2\omega_0$.

$\gamma > 2\omega_0$ donc α_1 et α_2 sont réels.

$$\theta = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)$$

$$\theta' = \alpha_1 a \exp(\alpha_1 t) + \alpha_2 b \exp(\alpha_2 t)$$

Conditions initiales : A $t = 0$ $\theta = \theta_0$ et $\theta' = \theta'_0$

On pose $\omega' = (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$\alpha_1 = -\gamma/2 + \omega'$ et $\alpha_2 = -\gamma/2 - \omega'$

$\theta_0 = a + b$

$\theta'_0 = \alpha_1 a + \alpha_2 b$ d'où

$a = (\alpha_2 \theta_0 - \theta'_0)/(\alpha_2 - \alpha_1) = 0,5/\omega' ((\omega' + \gamma/2) \theta_0 + \theta'_0)$

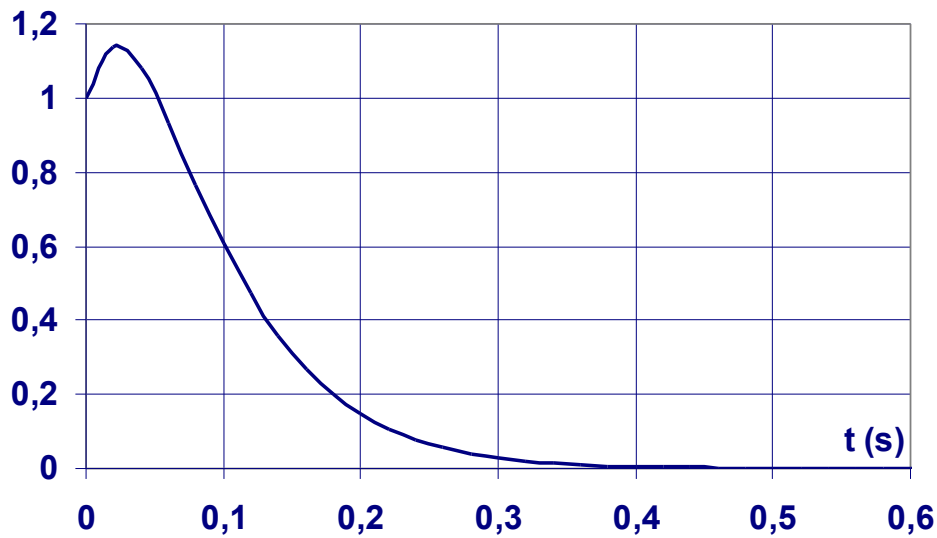
$b = (\alpha_1 \theta_0 - \theta'_0)/(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,5/\omega' ((\omega' - \gamma/2) \theta_0 - \theta'_0)$

En remplaçant et en développant les équations de θ et θ' , on obtient :

$\theta = e^{-\gamma/2 t} (\theta_0 \text{ch}(\omega' t) + (\theta'_0 + \gamma\theta_0/2)/\omega' \text{sh}(\omega' t))$

$\theta' = e^{-\gamma/2 t} (\theta'_0 \text{ch}(\omega' t) + (\theta_0 (\omega' - \gamma^2/(4\omega')) - \gamma\theta'_0/(2\omega')) \text{sh}(\omega' t))$

θ (rd)



$\theta_0 = 1$ rd

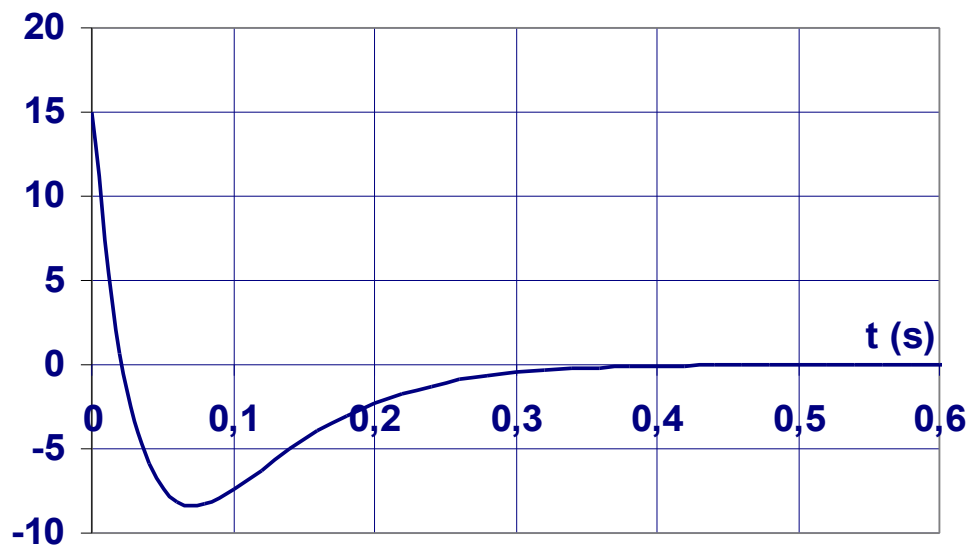
$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 80$ rd/s

$\omega' = 34,6$ rd/s

θ' (rd/s)



$\theta_0 = 1$ rd

$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 80$ rd/s

$\omega' = 34,6$ rd/s

2.4 Solution oscillatoire amortie $\gamma < 2\omega_0$.

$\gamma < 2\omega_0$ donc α_1 et α_2 sont complexes.

$$\alpha_1 = -\gamma/2 + j(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = -\gamma/2 + j\omega' \quad (\text{On pose } (\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = \omega')$$

$$\alpha_2 = -\gamma/2 - j(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = -\gamma/2 - j\omega'$$

$$\theta = a e^{-\gamma/2 t + j\omega' t} + b e^{-\gamma/2 t - j\omega' t}$$

$$\theta = e^{-\gamma/2 t} (a e^{j\omega' t} + b e^{-j\omega' t})$$

$$a = a_r + j a_i \quad b = b_r - j b_i$$

$$\theta = e^{-\gamma/2 t} ((a_r + j a_i)(\cos(\omega' t) + j \sin(\omega' t)) + (b_r + j b_i)(\cos(\omega' t) - j \sin(\omega' t)))$$

$$\theta = e^{-\gamma/2 t} ((a_r + b_r)(\cos(\omega' t) + (b_i - a_i)(\sin(\omega' t))) + j((a_r - b_r)(\sin(\omega' t) + (a_i + b_i)\cos(\omega' t))))$$

θ est la partie réelle donc

$$\theta = e^{-\gamma/2 t} ((a_r + b_r)(\cos(\omega' t) + (b_i - a_i)(\sin(\omega' t))) \quad \text{On pose } a_r + b_r = a \text{ et } b_i - a_i = b$$

$$\theta = e^{-\gamma/2 t} (a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t))$$

$$\theta' = -\gamma/2 e^{-\gamma/2 t} (a \cos(\omega' t) + b \sin(\omega' t)) + e^{-\gamma/2 t} (-a \omega' \sin(\omega' t) + b \omega' \cos(\omega' t))$$

$$\theta' = e^{-\gamma/2 t} ((-\gamma/2 a + b \omega') \cos(\omega' t) - (\gamma/2 b + a \omega') \sin(\omega' t))$$

Conditions initiales : A $t = 0$ $\theta = \theta_0$ et $\theta' = \theta'_0$

$$\theta_0 = a$$

$$\theta'_0 = -\gamma/2 a + b \omega' \text{ donc } b = (\theta'_0 + \gamma/2 \theta_0)/\omega' \text{ On a alors :}$$

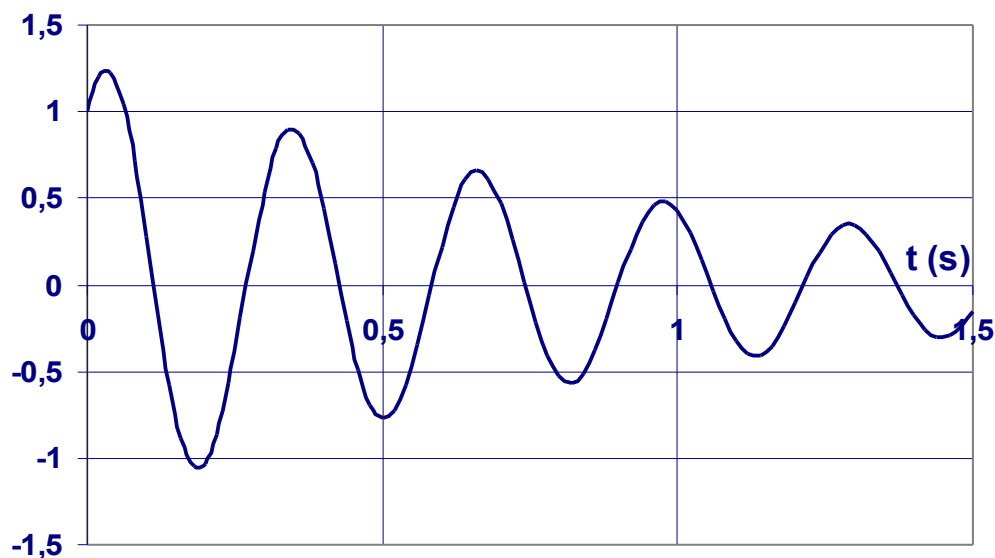
$$\theta = e^{-\gamma/2 t} (\theta_0 \cos(\omega' t) + (\theta'_0 + \gamma \theta_0/2)/\omega' \sin(\omega' t))$$

$$\theta' = e^{-\gamma/2 t} (\theta'_0 \cos(\omega' t) + (\theta_0 (\omega' - \gamma^2/(4\omega')) - \gamma \theta'_0/(2\omega')) \sin(\omega' t))$$

Periode de l'oscillateur

$$T = 2\pi/\omega' = 2\pi/(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$$

θ (rd)



$$\theta_0 = 1 \text{ rd}$$

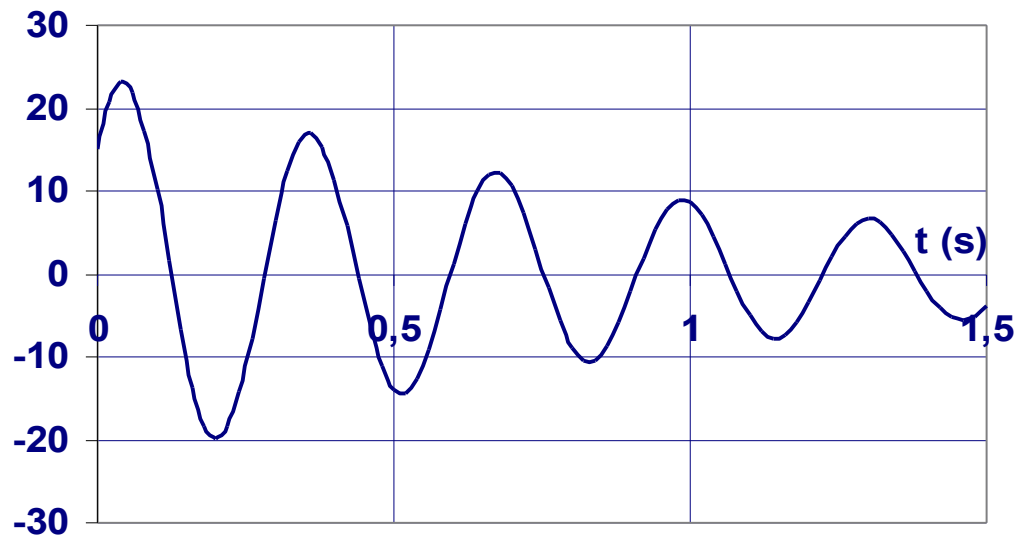
$$\theta'_0 = 15 \text{ rd/s}$$

$$\omega_0 = 20 \text{ rd/s}$$

$$\gamma = 2 \text{ rd/s}$$

$$\omega' = 19.97 \text{ rd/s}$$

θ' (rd/s)



$$\theta_0 = 1 \text{ rd}$$

$$\theta'_0 = 15 \text{ rd/s}$$

$$\omega_0 = 20 \text{ rd/s}$$

$$\gamma = 2 \text{ rd/s}$$

$$\omega' = 19,97 \text{ rd/s}$$

2.5 Solution apériodique critique $\gamma = 2\omega_0$.

$\omega' = \omega_0 - \gamma/2 = 0$ ce qui correspond à $h = 2(CJ)^{1/2}$

solution oscillante : $\theta = e^{-\gamma/2 t} (\theta_0 \cos(\omega' t) + (\theta'_0 + \gamma/2 \theta_0) / \omega' \sin(\omega' t))$

On fait tendre ω' vers 0 donc $(\theta'_0 + \gamma/2 \theta_0) \sin(\omega' t) / \omega'$ tend vers

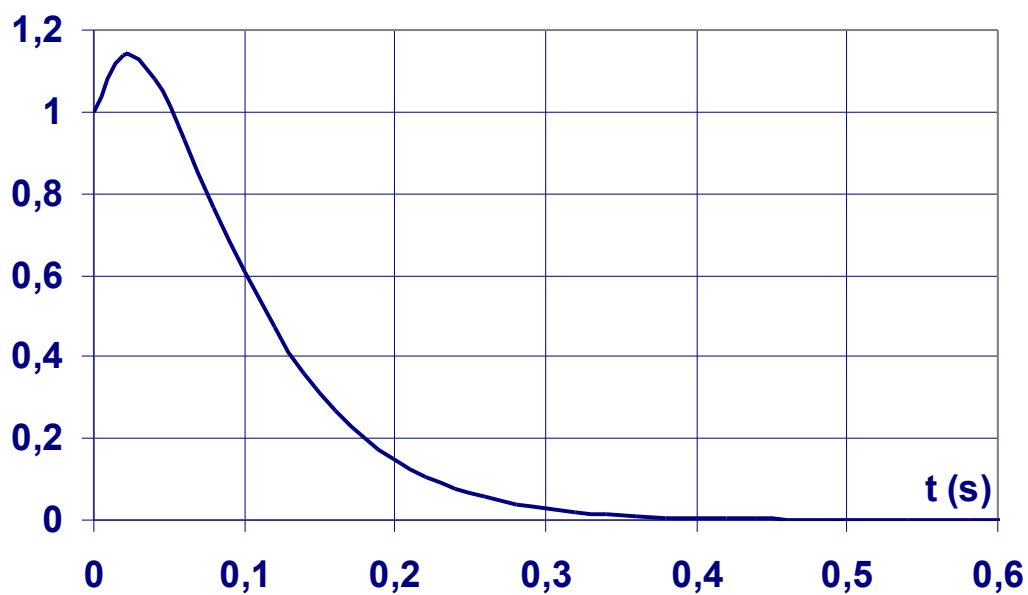
$$(\theta'_0 + \gamma/2 \theta_0) \omega' t / \omega' = (\theta'_0 + \gamma/2 \theta_0) t$$

$$\theta = e^{-\gamma/2 t} (\theta_0 + (\theta'_0 + \gamma \theta_0/2) t)$$

$$\theta' = e^{-\gamma/2 t} (\theta'_0 - \gamma/2 (\theta'_0 + \gamma \theta_0/2) t)$$

C'est le régime apériodique qui permet d'atteindre l'équilibre le plus rapidement.

θ (rd)



$$\theta_0 = 1 \text{ rd}$$

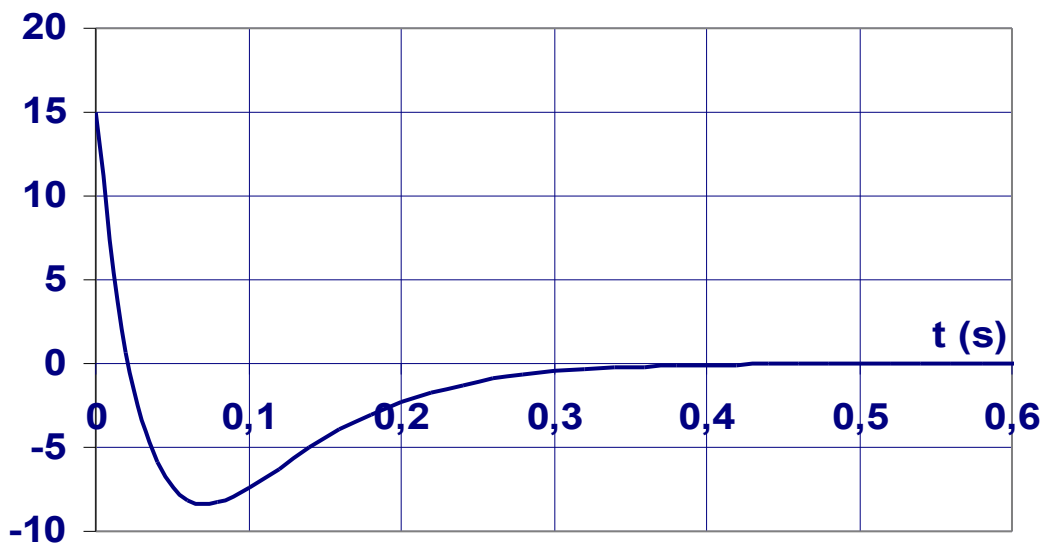
$$\theta'_0 = 15 \text{ rd/s}$$

$$\omega_0 = 20 \text{ rd/s}$$

$$\gamma = 40 \text{ rd/s}$$

$$\omega' = 0$$

θ' (rd/s)



$$\theta_0 = 1 \text{ rd}$$

$$\theta'_0 = 15 \text{ rd/s}$$

$$\omega_0 = 20 \text{ rd/s}$$

$$\gamma = 40 \text{ rd/s}$$

$$\omega' = 0$$

3. Détermination du moment d'inertie total J du pendule

J est la somme du moment d'inertie J_0 de la tige et du moment d'inertie des disques par rapport à l'axe vertical du pendule.

Pour déterminer le moment d'inertie J_d d'un cylindre de masse m_d par rapport à un axe parallèle à son diamètre, on peut utiliser différents théorèmes sur le moment d'inertie.

D'abord un théorème très utile qui dit que le moment d'inertie par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires qui ont l'axe comme intersection.

On en déduit que le moment d'inertie par rapport à l'axe du cylindre qui vaut $m_d R^2/2$ est la somme de deux moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires à la base du cylindre et passant par son axe qui valent donc chacun $m_d R^2/4$.

Le moment d'inertie par rapport à un plan perpendiculaire à un cylindre et passant par son centre est connu et vaut $m_d e^2/12$. Le même théorème donne donc :

$$\text{Donc } J_d = m_d R^2/4 + m_d e^2/12 = m_d (R^2/4 + e^2/12)$$

Pour la tige, on obtient $J_0 = M(r^2/4 + L^2/12)$ M masse et L longueur de la tige.

C'est le résultat qu'on obtient pour un cylindre plein, mais nos disques sont creux sur un rayon r donc $m = m_d - m_d r^2/R^2$ ou $m_d = m/(1 - r^2/R^2)$

$$J_d = m(R^2/4 + e^2/12)/(1 - r^2/R^2)$$

Le moment d'inertie J_Δ du disque évidé vaut donc J_d moins le moment d'inertie de la partie évidée qui a la forme d'un cylindre de rayon r, d'épaisseur e et de masse $m_d r^2/R^2$:

$$J_\Delta = J_d - m_d r^2/R^2 (r^2/4 + e^2/12) = m(R^2/4 + e^2/12)/(1 - r^2/R^2) - m r^2/R^2 (r^2/4 + e^2/12)/(1 - r^2/R^2)$$

En développant, on obtient :

$$J_\Delta = m((R^2 + r^2)/4 + e^2/12)$$

On utilise ensuite le théorème de Huygens pour obtenir le moment d'inertie par rapport à l'axe distant de d. On obtient alors en n'oubliant pas qu'on a deux disques :

$$J = J_0 + 2(J_\Delta + m d^2)$$

$$J = M(r^2/4 + L^2/12) + 2m(d^2 + (R^2 + r^2)/4 + e^2/12)$$

4. Constante de torsion d'un fil élastique cylindrique

On commence par étudier un tube de faible épaisseur Δr de rayon r et de longueur L .
Ce tube est tordu de l'angle θ à son extrémité.

On s'intéresse d'abord à une petite tranche quasi rectangulaire de longueur L , de hauteur Δh et d'épaisseur Δr . Cette tranche subit une déformation en losange d'un angle $\phi = r \theta / L$ ce qui correspond à un effort de cisaillement $g = \mu \phi$ (μ Module de cisaillement)
 $\mu = E / (2(1 + \sigma))$ E module d'Young et σ coefficient de Poisson du matériau élastique.

Par définition $g = \Delta F / (\Delta h \Delta r)$ ΔF étant la force de cisaillement subie par la tranche

Cela produit un moment $\Delta M = r \Delta F = r g \Delta h \Delta r = \mu r^2 \Delta h \Delta r / L \theta$

Le moment total subi par le tube est donc la somme des moments subis par l'ensemble des tranches faisant le tour complet du tube $M = \mu r^2 \Delta r / L \theta \sum \Delta h = \mu r^2 \Delta r / L \theta 2\pi r$

$$M = 2\pi \mu r^3 \Delta r / L \theta$$

Donc pour un tube cylindrique fin d'épaisseur Δr de rayon r et de longueur L

$$C = 2\pi \mu r^3 \Delta r / L$$

Pour une tige cylindrique pleine, on peut considérer qu'elle est constituée de tubes concentriques d'épaisseur dr et de rayons allant de 0 à R le rayon de la tige.

Le moment total subi par la tige sera l'intégrale de 0 à R de $2\pi \mu / L \theta r^3 dr$

Ce qui donne $M = \pi \mu R^4 / (2L) \theta$ donc

Pour une tige cylindrique pleine de rayon R et de longueur L

$$C = \pi \mu R^4 / (2L) \quad \text{Une tige 2 fois plus épaisse est 16 fois plus rigide !}$$

Exemple : Fil d'acier de $R = 2$ mm et de longueur 1 m

$$\mu_{\text{acier}} = 8,35 \cdot 10^{10} \quad \text{donc} \quad C = 2,1 \text{ Nm}$$