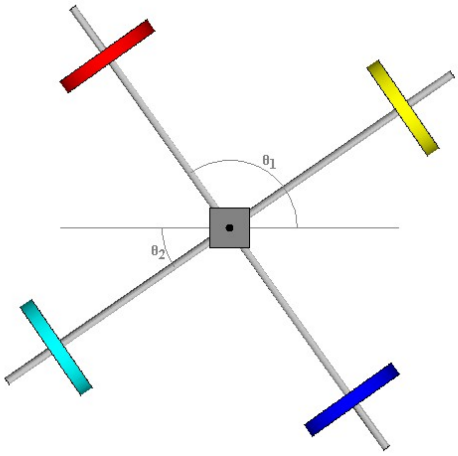
Animation

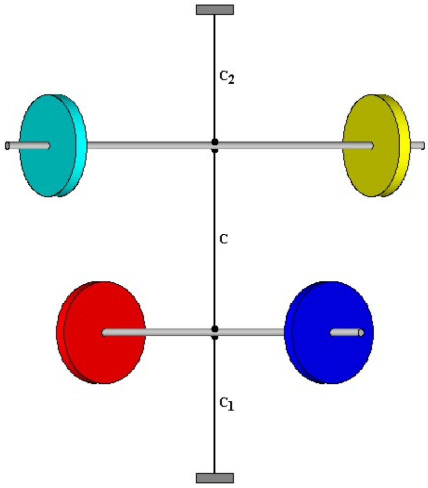
Pendules de torsion couplés

par Gilbert Gastebois

Menu

1. Schémas





J_1 et J_2 Moments d'inertie des deux pendules.

C_1, C_2 et C Constantes de torsion.

$\mathbf{M}_{C1} = - C_1\,\theta_1$

$\mathbf{M}_{C2} = - C_2\,\theta_2$

$\mathbf{M}_{C} = C(\theta_2 - \theta_1)$

2. Équations du mouvement

2.1 Équations différentielles du mouvement.

Deuxième loi de Newton en rotation : $J\,d^2\theta/dt^2 = \Sigma\,\mathbf{M}_C$

Pendule 1 : $J_1\,d^2\theta_1/dt^2 = \mathbf{M}_{C1} + \mathbf{M}_C$
Pendule 2 : $J_2\,d^2\theta_2/dt^2 = \mathbf{M}_{C2} - \mathbf{M}_C$
$J_1\,d^2\theta_1/dt^2 = - C_1\,\theta_1 + C(\theta_2 - \theta_1)$
$J_2\,d^2\theta_2/dt^2 = - C_2\,\theta_2 + C(\theta_1 - \theta_2)$
$d^2\theta_1/dt^2 = - (C_1/J_1 + C/J_1)\,\theta_1 + C/J_1\,\theta_2$
$d^2\theta_2/dt^2 = - (C_2/J_2 + C/J_2)\,\theta_2 + C/J_2\,\theta_1$

2.2. Solutions stationnaires (modes).

Un mode est une solution sinusoïdale de pulsation ω identique pour les deux pendules.
On cherche une solution du type $\theta_1 = a_1\,e^{\,i\,\omega t}$ et $\theta_2 = a_2\,e^{\,i\,\omega t}$
$- \omega^2 a_1\,e^{\,i\,\omega t} = - (C_1/J_1 + C/J_1)\,a_1\,e^{\,i\,\omega t} + C/J_1\,a_2\,e^{\,i\,\omega t}$
$- \omega^2 a_2\,e^{\,i\,\omega t} = - (C_2/J_2 + C/J_2)\,a_2\,e^{\,i\,\omega t} + C/J_2\,a_1\,e^{\,i\,\omega t}$
$0 = (C_1/J_1 + C/J_1 - \omega^2)\,a_1\,e^{\,i\,\omega t} - C/J_1\,a_2\,e^{\,i\,\omega t}$
$0 = (C_2/J_2 + C/J_2 - \omega^2)\,a_2\,e^{\,i\,\omega t} - C/J_2\,a_1\,e^{\,i\,\omega t}$
On pose $(C_1 + C)/J_1 = A_{11}$ $\quad - C/J_1 = A_{12}$ $\quad (C_2 + C)/J_2 = A_{22}$ $\quad - C/J_2 = A_{21}$
$0 = (A_{11} - \omega^2)\;a_1 \quad + \quad A_{12}\quad a_2$
$0 = \quad A_{21}\quad a_1 \quad + \quad A_{22} - \omega^2 \quad a_2$
Les valeurs de ω qui vérifient ces équations sont celles qui annulent le déterminant de la matrice A donc
$(A_{11} - \omega^2)(A_{22} - \omega^2) - A_{12}\,A_{21} = 0$
$\omega^4 - (A_{11} + A_{22})\,\omega^2 - A_{12}\,A_{21} + A_{11}\,A_{22} = 0$ Les deux solutions sont :

$\omega_1^2 = (A_{11} + A_{22})/2 - ((A_{11} - A_{22})^2 /4) + A_{12} A_{21})^{1/2}$
$\omega_2^2 = (A_{11} + A_{22})/2 + ((A_{11} - A_{22})^2 /4) + A1_2 A_{21})^{1/2}$
$\boldsymbol{\omega_1^2 = ((C_1 + C)/J_1 + (C_2 + C)/J_2)/2 - (((C_1 + C)/J_1 - (C_2 + C)/J_2)^2/4 + C_2 /J_1J_2)^{1/2}}$
$\boldsymbol{\omega_2^2 = ((C_1 + C)/J_1 + (C_2 + C)/J_2)/2 + (((C_1 + C)/J_1 - (C_2 + C)/J_2)^2/4 + C_2/J_1J_2)^{1/2}}$
avec $a_1/a_2 = A_{12}/(\omega^2 - A_{11})$ pour chaque mode

2.3. Cas de l'oscillateur symétrique

Oscillateur symétrique : $J_1 = J_2 = J$ et $C_1 = C_2 = c$ $\omega_0 = (c/J)^{1/2}$ est la pulsation propre commune des deux pendules isolés
$\omega_1^2 = ((c + C)/J + (c + C)/J)/2 - (((c+ C)/J - (c + C)/J)^2 /4 + C^2 /J^2)^{1/2}$
$\omega_1^2 = (c + C)/J - C /J = c/J = \omega_0^2$
$a_1/ a_2 = - C/J / (c/J - c/J - C/J) = 1$ $a_1 = a_2$
$\boldsymbol{\omega_1 = \omega_0}$ **et** $\boldsymbol{a_1 = a_2}$ Les deux pendules oscillent avec la même amplitude à leur propre fréquence. Le fil de couplage reste non tordu, il n'a aucun rôle.

$\omega_2^2 = ((c + C)/J + (c + C)/J)/2 + (((c + C)/J - (c + C)/J)^2 /4 + C^2 /J^2)^{1/2}$
$\omega_2^2 = (c + C)/J + C /J = c/J + 2C/J = \omega_0^2 + 2C/J$
$a_1/ a_2 = - C/J / (c/J + 2C/J - c/J - C/J) = - 1$ $a_1 = - a_2$
$\boldsymbol{\omega_2 = (\omega_0^2 + 2C/J)^{1/2}}$ **et** $\boldsymbol{a_1 = - a_2}$ Les deux pendules oscillent avec la même amplitude, mais en opposition de phase. Le fil de couplage ajoute un moment qui diminue la période d'oscillation de chaque pendule.

2.4. Solution générale

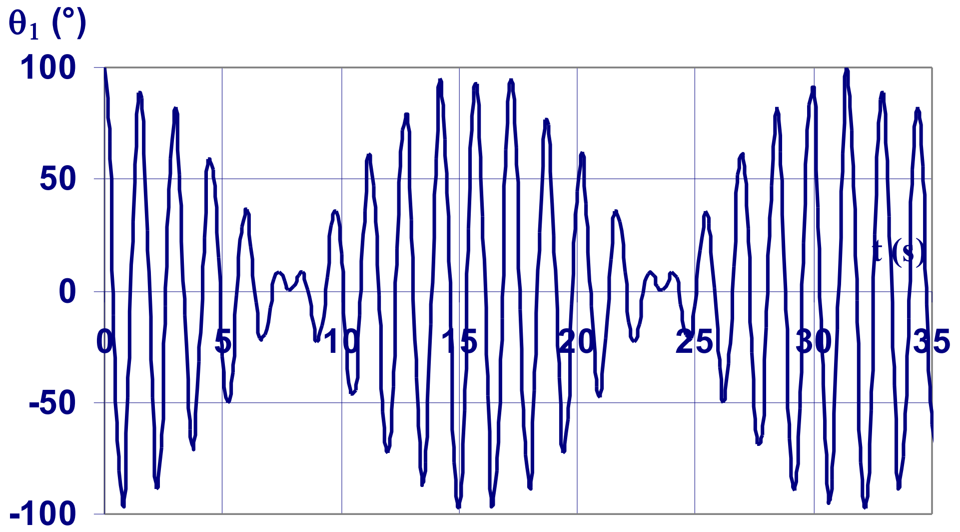
la solution générale est une combinaison linéaire des deux modes
$\boldsymbol{\theta_1 = A_1 \exp(i\, \omega_1 t) + B_1 \exp(i\, \omega_2 t)}$ $A_1 = c_1 + i\, d_1$ $B_1 = e_1 + i\, f_1$
$\boldsymbol{\theta_2 = A_2 \exp(i\, \omega_1 t) + B_2 \exp(i\, \omega_2 t)}$ $A_2 = c_2 + i\, d_2$ $B_2 = e_2 + i\, f_2$
$A_1/A_2 = A_{12}/(\omega_1^2 - A_{11})$ et $B_1/B_2 = A_{12}/(\omega_2^2 - A_{11})$ sont réels donc $c_2d_1 = c_1d_2$ et $e_2f_1 = e_1f_2$
On prend ensuite la partie réelle de θ_1 et θ_2 compte tenu des conditions initiales sur θ_1, θ_2, θ'_1 et θ'_2. On obtient un système de 8 équations à 8 inconnues qu'il ne reste plus qu'à à résoudre...

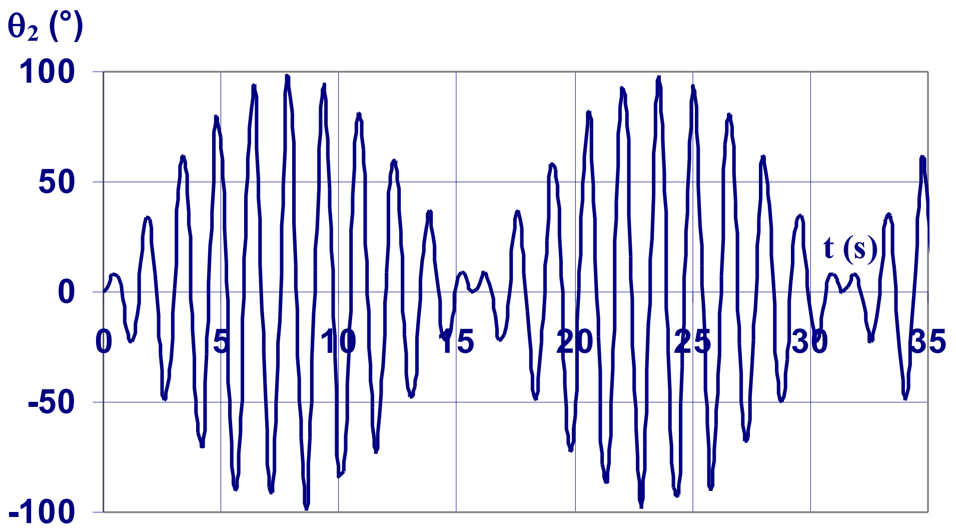
3. Battements de l'oscillateur symétrique.

$\theta_1 = A_1 \exp(i\, \omega_1 t) + B_1 \exp(i\, \omega_2\, t)$
$\theta_2 = A_2 \exp(i\, \omega_1 t) + B_2 \exp(i\, \omega_2\, t)$
pour simplifier les calculs, on prend un cas particulier simple de l'oscillateur symétrique :
Conditions initiales : A $t = 0$, $\theta_1 = \theta_m$, $\theta_2 = 0$, $\theta'_1 = 0$ et $\theta'_2 = 0$.
On trouve alors $A_1 = A_2 = B_1 = - B_2 = \theta_m/2$
$\theta_1 = \theta_m/2\, (\exp(i\, \omega_1 t) + \exp(i\, \omega_2\, t))$
$\theta_1 = \theta_m/2 \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t)\, (\exp(- i\, (\omega_2 - \omega_1)/2\, t) + \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\, t)$
$\theta_1 = \theta_m \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t)$
On prend la partie réelle, on obtient :
$\boldsymbol{\theta_1 = \theta_m \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \cos((\omega_1 + \omega_2)/2\, t)}$

$\theta_2 = \theta_m /2\, (\exp(i\, \omega_1 t) - \exp(i\, \omega_2 t))$
$\theta_2 = \theta_m/2 \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t)\, (\exp(- i\, (\omega_2 - \omega_1)/2\, t) - \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\, t)$
$\theta_2 = - i\, \theta_m \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t) = \theta_m \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t - \pi/2)$
On prend la partie réelle, on obtient :
$\boldsymbol{\theta_2 = \theta_m \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \sin((\omega_1 + \omega_2)/2\, t)}$

Ces deux mouvements correspondent à des battements, l'amplitude de chaque oscillateur passe alternativement par des maxima puis par des minima nuls. Le maximum de l'un correspond au minimum de l'autre. Les deux oscillateurs s'échangent leur énergie mécanique à la période $\boldsymbol{T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)}$ **C'est la période des battements**





$J = 0{,}01$ kg.m²

$c = 0{,}16$ N.m

$C = 0{,}0168$ N.m

$\theta m = 100$ °

$\omega_1 = 4$ rd/s

$\omega_2 = 4{,}4$ rd/s

$T = 1{,}5$ s

$T_b = 15{,}7$ s

Pour l'oscillateur symétrique, on a : $\omega_2 - \omega_1 = (\omega_0^2 + 2C/J)^{1/2} - \omega_0$.
Si $C/J << \omega_0^2$ (faible couplage), alors $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0\,(1+ C/(J\omega_0^2)) - \omega_0 = C/(J\omega_0)$
$T_b = 2\pi J\omega_0/C = 2\pi(Jc/C^2)^{1/2}$

Remarque : On pourrait penser que T_b devrait valoir $2\pi/((\omega_2 - \omega_1)/2) = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$, car c'est la période de $\cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$ et de $\sin((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$, mais en réalité que le cosinus (ou le sinus) vaille 1 ou -1, cela correspond dans les deux cas à un maximum d'amplitude donc la période des battements (temps qui sépare deux passages par un maximum de l'amplitude) ne vaut que la moitié et on a bien :
$T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$
Dans le cas général, on a toujours des battements avec la même période, mais les minima ne sont pas nuls. Les deux cas limites sont les deux modes ou le mouvement des deux oscillateurs est parfaitement sinusoïdal, les minima et les maxima sont égaux, on n'a plus de battements du tout.