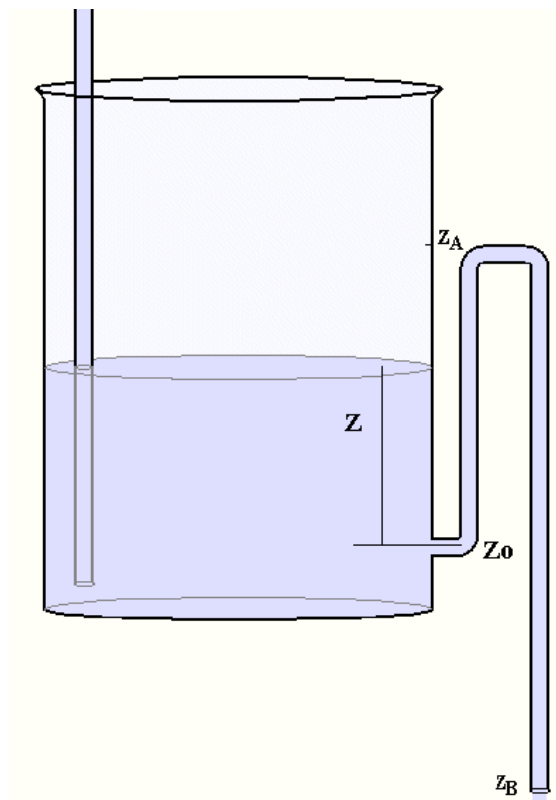


1. Description

Le vase de Tantale est un dispositif périodique à relaxation. Le vase est alimenté en permanence à débit D constant. Il se remplit puis se vide selon que le siphon est amorcé ou non.

2. Schéma



Z altitude de l'eau dans le vase

Z_0 entrée du siphon : $Z_0 = 0$

Z_A niveau maximum du siphon

Z_B altitude de sortie de l'eau du siphon.

S section du vase

s section du tuyau du siphon

D débit constant d'alimentation du vase.

On néglige la perte de charge par frottement dans le siphon.

Dans ces conditions, l'énergie est conservée et on a la formule de Bernoulli donnant la vitesse dans le siphon.

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g (Z - Z_B) \text{ d'où}$$

$$v = (2 g (Z - Z_B))^{1/2}$$

3. Étude

3.1 Modes de fonctionnement

Le dispositif a trois modes de fonctionnement qui dépendent du débit d'alimentation.

Si $D > \text{débit } D_A$ du siphon quand $Z = Z_A$, le niveau de l'eau se stabilisera à une altitude supérieure à Z_A (ou bien le vase débordera...). C'est le mode haut.

Si $D > \text{débit } D_0$ du siphon quand $Z = Z_0$, le niveau de l'eau se stabilisera à une altitude comprise entre Z_0 et Z_A quand les deux débits seront égaux. C'est le mode intermédiaire.

Si $D < \text{débit } D_0$ du siphon quand $Z = Z_0$, le niveau de l'eau descendra jusqu'à Z_0 , alors, le siphon se désamorçera et le vase pourra se remplir à nouveau jusqu'à Z_A , où le siphon s'amorcera, ce qui fera baisser le niveau jusqu'à Z_0 , et le cycle repartira. On a alors le régime périodique de relaxation.

3.2 Équation différentielle.

Le débit du siphon $D_s = v s$ vaut $s (2 g (Z - Z_B))^{1/2}$ quand il est amorcé et zéro quand il est désamorcé. La variation du volume V d'eau en fonction du temps étant :

$$dV = S dZ = (D - D_s) dt$$

On a donc deux régimes distincts.

Siphon désamorcé : $S dZ = D dt$

$$Z = \frac{D}{S} t \quad \text{A } t=0 \quad Z = Z_o = 0$$

Siphon amorcé : $S dZ = (D - D_s) dt$

$$dZ = \frac{D - s \sqrt{2 g (Z - Z_B)}}{S} dt$$

En général, cette équation n'a pas de solution analytique, il faut la résoudre numériquement.

Cependant si $D \ll D_o$, on peut la résoudre.

Si $D \ll D_o$ $dZ = - (s (2 g (Z - Z_B))^{1/2}) / S dt$

$$dZ / (Z - Z_B)^{1/2} = - (2 g)^{1/2} s / S dt$$

$$(Z - Z_B)^{1/2} = - (g/2)^{1/2} s / S t + K \quad \text{A } t=0 \quad Z = Z_A \quad \text{donc } K = (Z_A - Z_B)^{1/2}$$

$$Z = Z_B + \left(\sqrt{Z_A - Z_B} - \sqrt{\frac{g}{2} \frac{s t}{S}} \right)^2 \quad \text{si } D \ll D_o$$

Pour atteindre $Z = 0$, il faut $t_v = ((Z_A - Z_B)^{1/2} - (-Z_B)^{1/2}) S / (s(g/2)^{1/2})$

(L'autre signe donne $t_v > 0$ pour $Z_A = 0$, ce qui n'est pas physique.)

Il faut ajouter le temps de remplissage $t_R = S Z_A / D \gg t_v$ pour obtenir la période T .

$$T = \frac{S Z_A}{D} + \left(\sqrt{Z_A - Z_B} - \sqrt{-Z_B} \right) \sqrt{\frac{2 S}{g s}}$$

$$\text{ou } T = \frac{S Z_A}{D} \left(1 + \left(\sqrt{Z_A - Z_B} - \sqrt{-Z_B} \right) \sqrt{\frac{2}{g s Z_A}} \right) \quad \text{Si } D \ll D_o$$

3.3 Modes non périodiques. $D > D_o$

Le débit du siphon $D_s = v s = s (2 g (Z - Z_B))^{1/2}$

Le niveau de l'eau se stabilise quand $D = D_s = s (2 g (Z - Z_B))^{1/2}$

$$Z_{\max} = Z_B + \frac{D^2}{2 g s^2}$$

si $D > s (2 g (Z_A - Z_B))^{1/2}$ On a le mode haut.

si $s (2 g (Z_A - Z_B))^{1/2} > D > s (2 g (Z_o - Z_B))^{1/2}$ On a le mode intermédiaire.